8 Proporcionalidad numérica

INTRODUCCIÓN

La proporcionalidad numérica es un concepto que resulta a los alumnos complejo y difícil de comprender si no se ha adquirido soltura en aspectos como las operaciones de multiplicación y división de números enteros y por la unidad seguida de ceros, la equivalencia de fracciones, la fracción como expresión decimal y de una cantidad y el porcentaje.

A través de la comprensión de los conceptos de magnitud, proporción, razón y constante de proporcionalidad se aplican las proporciones y sus métodos de resolución de problemas a situaciones de la vida cotidiana.

Las relaciones entre magnitudes inversamente proporcionales plantean un mayor grado de dificultad, y se estudiarán mediante relaciones entre proporciones.

Asimismo, se introducen los conceptos de porcentajes, que posibilitan expresar numéricamente situaciones de la vida real.

También presentamos en esta unidad la resolución de problemas con porcentajes, aumentos y disminuciones porcentuales.

RESUMEN DE LA UNIDAD

- *Razón* es el cociente entre dos números o cantidades $\frac{a}{b}$. El número *a* se llama *antecedente* y *b* es el *consecuente*.
- *Proporción* es la igualdad entre dos razones.
- En una proporción, el producto de medios es igual al producto de extremos.
- Dos *magnitudes* son *directamente proporcionales* si la razón entre dos cantidades correspondientes de ambas es siempre la misma.
- Dos *magnitudes* son *inversamente proporcionales* cuando al aumentar o disminuir una de ellas, disminuye o aumenta la otra en la misma cantidad.
- Los *porcentajes* son cantidades de una magnitud correspondientes a 100 unidades de la otra magnitud.

OBJETIVOS	CONTENIDOS	PROCEDIMIENTOS
1. Identificar la relación de proporcionalidad entre dos magnitudes.	• Concepto de magnitud. • Proporcionalidad. Constante de proporcionalidad. • Series de razones iguales. Propiedades.	• Identificación de relaciones de proporcionalidad. • Realización de tablas de valores proporcionales.
2. Reconocer magnitudes directamente proporcionales.	• Magnitudes directamente proporcionales.	• Identificación de magnitudes directamente proporcionales.
3. Reconocer magnitudes inversamente proporcionales.	• Magnitudes inversamente proporcionales.	• Identificación de magnitudes inversamente proporcionales.
4. Comprender el concepto de porcentajes, realizar operaciones y resolver problemas de porcentajes.	• Concepto de porcentaje.	• Resolución de problemas mediante el uso del tanto por ciento.

IDENTIFICAR LA RELACIÓN DE PROPORCIONALIDAD ENTRE MAGNITUDES

NOMBRE: ______________________ CURSO: ____________ FECHA: ____________

- Para **multiplicar** un número por **10**, **100**, **1.000**... se desplaza la coma a la derecha tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

  $3{,}47 \cdot 100 = 347$ $\qquad$ $589 \cdot 1.000 = 589.000$

- Para **dividir** un número entre **10**, **100**, **1.000**... se desplaza la coma a la izquierda tantos lugares como ceros tenga la unidad: 1, 2, 3...

  $25{,}87 : 100 = 0{,}2587$ $\qquad$ $29 : 10 = 2{,}9$

- Al **dividir** el numerador entre el denominador de una fracción se obtiene un número decimal. Es el valor numérico de la fracción.

$$\frac{7}{2} = 7 : 2 = 3{,}5$$

- Dos fracciones son **equivalentes** si sus productos cruzados son iguales.

$$\frac{2}{5} = \frac{6}{15} \qquad \frac{2}{5} \times \frac{6}{15} \qquad 2 \cdot 15 = 5 \cdot 6;\ 30 = 30$$

CONCEPTO DE MAGNITUD

- Una **magnitud** es una cualidad o una característica de un objeto que podemos medir.
  Ejemplo: longitud, masa, número de alumnos, capacidad, velocidad, etc.
- Las magnitudes se expresan en unidades de medida.
  Ejemplo: metros, kilómetros, kilogramos, gramos, número de personas, litros, centilitros, kilómetros por hora, metros por segundo, etc.
- Para cada una de esas medidas existen diferentes cantidades de esa magnitud.
  Ejemplo: una regla de 1 metro, una caja de 2 kilogramos, un tonel de 5 litros, 95 km/h, etc.

1 **Indica si son magnitudes o no.**

a) El peso de un saco de patatas.
b) El cariño.
c) Las dimensiones de tu pupitre.
d) La belleza.
e) Los litros de agua de una piscina.
f) La risa.

2 **Indica dos unidades de medida para cada magnitud.**

a) El precio de una bicicleta.
b) La distancia entre dos pueblos.
c) El peso de una bolsa de naranjas.
d) El contenido de una botella.
e) El agua de un embalse.
f) La longitud de la banda de un campo de fútbol.

PROPORCIONALIDAD

En un comedor escolar cada alumno se come 2 croquetas. Dos alumnos comen 4 croquetas; 3 alumnos, 6 croquetas; 4 alumnos, 8 croquetas... ¿Cuántas croquetas comen 9 alumnos? ¿Y 12 alumnos? ¿Y 15 alumnos?

NÚMERO DE ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
NÚMERO DE CROQUETAS	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

- Las series de números de ambas magnitudes, número de alumnos y croquetas, son proporcionales entre sí, porque se puede pasar de una serie a otra multiplicando o dividiendo por el mismo número (2).
- Decimos que entre las magnitudes, número de alumnos y número de croquetas que se comen, existe proporcionalidad.
- La relación entre las magnitudes se expresa mediante una tabla llamada **tabla de proporcionalidad**.

3 **Averigua el número por el que hay que multiplicar y/o dividir para pasar de una serie a otra, y que sean proporcionales.**

a)

1	2	3	4	5		6
	10	15			30	

b)

1	2				6	7
3	6	9		15		

c)

3	4	5	6	7	8	9
						18

d)

1	10	100		10.000
10	100		10.000	

4 **En un mercado 1 kilogramo de manzanas cuesta 1,50 €. Elabora una tabla de proporcionalidad con las magnitudes: masa de manzanas (de 1 a 10 kg) y el precio correspondiente.**

PESO (kg)	1									
PRECIO (€/kg)	1,50									

RAZÓN ENTRE DOS NÚMEROS O CANTIDADES

- Una **razón** es el cociente entre dos números cualesquiera o cantidades que se pueden comparar.
- Si a y b son dos números, la razón entre ellos es $\frac{a}{b}$.
- No hay que confundir razón con fracción:
  – En una razón, los números a y b pueden ser números naturales y/o decimales.
  Por tanto, $\frac{2{,}5}{5}, \frac{4}{3{,}5}, \frac{10}{25}$ son razones.
  – En una fracción, los números a y b son números naturales, y $\frac{2}{5}, \frac{4}{3}, \frac{10}{25}$ son fracciones.

5 **Indica si estos cocientes son fracciones o razones.**

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{0,5}{7}$ c) $\frac{5}{10}$ d) $\frac{3,5}{9}$ e) $\frac{4}{8}$

Recordamos el ejemplo de los alumnos y las croquetas:

NÚMERO DE ALUMNOS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
NÚMERO DE CROQUETAS	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30

- Podemos expresar las razones de los valores de cada magnitud de la siguiente manera.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \dots, \frac{9}{18}, \dots, \frac{12}{24}, \dots, \frac{15}{30}$$

  Son razones de las magnitudes número de alumnos y croquetas.

- Observamos que:

$$\frac{1}{2} = 0,5 \quad \frac{2}{4} = 0,5 \quad \frac{3}{6} = 0,5 \quad \frac{4}{8} = 0,5 \quad \dots \quad \frac{9}{18} = 0,5 \quad \dots \quad \frac{12}{24} = 0,5 \quad \dots \quad \frac{15}{30} = 0,5$$

  Forman una serie de razones iguales. Su valor es el mismo: 0,5.

- La igualdad de dos razones forma una **proporción**:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = 0,5 \qquad \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = 0,5 \qquad \frac{9}{18} = \frac{12}{24} = 0,5$$

- El cociente de las razones de una proporción se llama **constante de proporcionalidad** (0,5).

6 **Completa estas series de razones iguales.**

a) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{5}{15} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

b) $\frac{2}{5} = \frac{6}{15} = \frac{12}{30} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

c) $\frac{5}{3} = \frac{10}{6} = \frac{15}{9} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

d) $\frac{3}{7} = \frac{9}{21} = \frac{27}{63} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad} = \frac{\quad}{\quad}$

7 **Completa las tablas, forma razones iguales, escribe las proporciones e indica la constante de proporcionalidad.**

a)

2	3	6	15	100
4				

b)

1		3		5	6
10					

PROPIEDADES DE LAS RAZONES IGUALES

1.ª La suma de los antecedentes dividida entre la suma de los consecuentes es igual a la razón de proporcionalidad.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=\frac{a+c+e}{b+d+f} \qquad \frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{1+2+3+4}{2+4+6+8}=\frac{10}{20}=0{,}5$$

2.ª En una proporción, el producto de extremos es igual al producto de medios. Recuerda el concepto de fracciones equivalentes y los productos cruzados.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \quad a\cdot d=b\cdot c \qquad \frac{1}{2}=\frac{2}{4} \quad 1\cdot 4=2\cdot 2 \qquad \frac{3}{6}=\frac{4}{8} \quad 3\cdot 8=6\cdot 4$$

8 **Comprueba las propiedades de las razones iguales del ejercicio 7.**

9 **Una entrada de cine cuesta 5 €. ¿Cuánto costarán 2, 4, 6, 8 y 10 entradas?**

a) Forma la tabla de valores.
b) Escribe las razones iguales.
c) Calcula la constante de proporcionalidad.
d) Comprueba las propiedades de razones iguales.

ADAPTACIÓN CURRICULAR

RECONOCER MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

NOMBRE: ______________________ CURSO: __________ FECHA: __________

En un establo con 6 kg de pienso se alimentan 10 vacas; con 12 kg, 20 vacas; con 18 kg, 30 vacas; con 24 kg, 40 vacas; con 30 kg, 50 vacas...

Formamos la tabla de valores de ambas magnitudes:

PIENSO (kg)	6	12	18	24	30
NÚMERO DE VACAS	10	20	30	40	50

Observamos que:

1.° Al aumentar los kilos de pienso (doble, triple…), aumenta el número de vacas en la misma proporción (doble, triple…).

Al disminuir una magnitud (mitad, tercio…), la otra disminuye de la misma manera (mitad, tercio…).

2.° La razón entre dos valores cualesquiera de kilos de pienso y número de vacas forma una proporción: $\frac{6}{10} = \frac{12}{20}$ $\frac{18}{30} = \frac{24}{40}$ $\frac{6}{10} = \frac{30}{50}$

3.° La constante de proporcionalidad de dos o más valores de kilos de pienso y número de vacas es la misma:

$$\frac{6}{10} = \frac{12}{20} = \frac{18}{30} = \frac{24}{40} = \frac{30}{50} = 0{,}6$$

Por tanto, las magnitudes, pienso y número de vacas, son **directamente proporcionales**.

1 **Indica si las siguientes magnitudes son directamente proporcionales.**

a) El peso de naranjas (en kilogramos) y su precio.
b) La velocidad de un coche y el tiempo que emplea en recorrer una distancia.
c) El número de operarios de una obra y el tiempo que tardan en terminarla.
d) El número de hojas de un libro y su peso.
e) El precio de una tela y los metros que se van a comprar.
f) La edad de un alumno y su altura.

2 **En un supermercado encontramos la siguiente información.**

«1 botella de refresco de cola cuesta 3,50 €; 2 botellas, 6 €; 4 botellas, 11 €; 6 botellas, 16 €».

Indica si las magnitudes, número de botellas de refresco y precio que se paga por ellas, son directamente proporcionales. Razona tu respuesta.

3 **Completa las tablas para que los valores sean directamente proporcionales. Compruébalo aplicando las propiedades anteriores.**

a)

3	6	12	24	48
4				

b)

4	8	12	16	4.820
1				

EJEMPLO

Si 3 rotuladores cuestan 6 €, ¿cuánto costarán 7 rotuladores?

- Intervienen dos magnitudes, número de rotuladores y precio, que son directamente proporcionales: cuantos más rotuladores compremos, más dinero costarán.
- Conocemos tres cantidades de estas magnitudes:
  2 cantidades de rotuladores: 3 y 7.
  1 cantidad de precio: 6 €, que corresponde a 3 rotuladores.
- Desconocemos una cuarta cantidad, lo que cuestan 7 rotuladores.

Se resuelve de la siguiente manera.

$$\left.\begin{array}{r}\text{Si 3 rotuladores cuestan } 6\\ \text{7 rotuladores costarán } x\end{array}\right\}$$

Son magnitudes directamente proporcionales:

$$\frac{3}{7} = \frac{6}{x} \qquad 3 \cdot x = 7 \cdot 6 \qquad 3x = 42 \qquad \frac{3x}{3} = \frac{42}{3} \qquad x = 14$$

7 rotuladores costarán 14 €.

4 **Dos kilos de naranjas cuestan 1,50 €. ¿Cuánto costarán 5 kg? ¿Y 12 kg?**

5 **En una obra, dos obreros realizan una zanja de 5 m. Si mantienen el mismo ritmo de trabajo, ¿cuántos metros de zanja abrirán si se incorporan 3 obreros más?**

6 **El precio de 12 fotocopias es de 0,50 €. ¿Cuánto costará hacer 30 fotocopias?**

7 **Un ciclista recorre 75 kilómetros en 2 horas. Si mantiene siempre la misma velocidad, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 5 horas?**

8 Un túnel de lavado limpia 12 coches en una hora (60 minutos).
¿Cuánto tiempo tardará en lavar 25 coches? ¿Y 50 coches?

9 Diez barras de pan cuestan 4,75 €. ¿Cuánto costarán 18 barras? ¿Y 24 barras?

10 El precio de 9 billetes de autobús es 10 €. ¿Cuál será el precio de 12 billetes?
¿Y de 15 billetes?

11 Si 5 botellas de leche cuestan 3,75 €, ¿cuánto costará una caja de 12 botellas?
¿Y una caja de 36 botellas?

OBJETIVO 3

IDENTIFICAR MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES — 8

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

Magnitudes inversamente proporcionales

- Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando:
  – Al **aumentar** una magnitud el doble, el triple..., la otra **disminuye** el doble, el triple...
  – Al **disminuir** una magnitud la mitad, la tercera parte..., la otra **aumenta** la mitad, la tercera parte...
- Al multiplicar (o dividir) uno de los valores de una magnitud por un número, el valor correspondiente de la otra magnitud queda dividido (o multiplicado) por el mismo número.

EJEMPLO

Un grifo vierte 3 litros de agua cada minuto, tardando 15 minutos en llenar un tonel. Si aumentamos el caudal a 6 litros por minuto, tardará 7,5 minutos en llenarlo. Si lo aumentamos a 9 litros por minuto, lo llenará en 5 minutos. Si lo aumentamos a 12 litros por minuto, tardará 3,75 minutos, etc.

- Distinguimos dos magnitudes: caudal de agua (en litros por minuto) y tiempo (en minutos) en llenar el tonel.
  – Al aumentar el número de litros por minuto, disminuye el tiempo en que se llenaría el tonel.
  – Si disminuye el caudal, aumenta el tiempo.
  – Son magnitudes inversamente proporcionales:

CAUDAL (litros/minuto)	3	6	9	12
TIEMPO (minutos)	15	7,5	5	3,75

- Vemos que en las razones de las proporciones se invierte el orden.

$$\frac{3}{6} = \frac{7,5}{15} = 0,5 \qquad \frac{3}{9} = \frac{5}{15} = 0,3 \qquad \frac{12}{6} = \frac{7,5}{3,75} = 2$$

- Al multiplicar (o dividir) uno de los valores, el valor correspondiente queda dividido (o multiplicado) por el mismo número.

· 2

3	6
15	7,5

: 2

· 4

3	12
15	3,75

: 4

· 3

3	9
15	5

: 3

1 **Indica si las siguientes magnitudes son o no inversamente proporcionales.**

a) La velocidad de un coche y el tiempo que tarda en recorrer una distancia.

b) El número de limpiadores de un edificio y el tiempo que tardan.

c) El número de ladrillos de una pared y su altura.

d) El peso de la fruta y el dinero que cuesta.

e) La velocidad de un corredor y la distancia que recorre.

f) El número de grifos de un depósito y el tiempo que tarda en llenarse.

2 **Completa las siguientes tablas de valores.**

a)

5	10	20	4		
60	30			25	5

b)

1	2		4		
36		12		6	4

c)

8			3	1	6
3	12	4			

d)

6	3	21	7		1
7				1	

EJEMPLO

10 albañiles tardan 45 días en construir un muro. Si se quiere terminar la obra en 15 días, ¿cuántos albañiles harían falta?

- Las magnitudes son número de albañiles y días de trabajo.
- Son inversamente proporcionales: si queremos realizar la obra en menos tiempo, habría que aumentar el número de albañiles.

Lo resolvemos de la siguiente manera.

$$\frac{10}{x} = \frac{15}{45} \rightarrow 10 \cdot 45 = x \cdot 15 \rightarrow 450 = 15x \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{450}{15} = \frac{15x}{15} \quad x = 30$$

Harían falta 30 albañiles para terminar el trabajo en 15 días.

3 **Averigua el número de albañiles que realizarían el trabajo anterior si se quiere terminar en 5 días.**

4 **Un depósito de agua se llena en 18 horas con un grifo del que salen 360 litros de agua cada minuto.**

a) ¿Cuánto tardaría en llenarse el depósito si salieran 270 litros por minuto?

b) ¿Y si fueran 630 litros por minuto?

NOMBRE: ____________________ CURSO: __________ FECHA: __________

SIGNIFICADO DEL PORCENTAJE, TANTO POR CIENTO (%)

- Fíjate en las siguientes frases.

  «El equipo ganó este año el 85 % de los partidos».

  «El 9 % de los alumnos de la clase superan los 13 años».
- En la vida diaria se utilizan los números mediante expresiones de porcentaje.
- Expresar un determinado **tanto por ciento** (85 %, 9 %) de una cantidad (partidos, alumnos) consiste en dividir esa cantidad en 100 partes y coger, tomar, indicar, señalar… el tanto indicado.

EJEMPLO

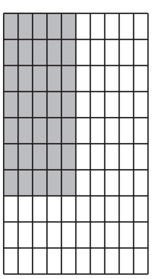
	%	SIGNIFICADO	FRACCIÓN	VALOR	SE LEE
El equipo ganó el 85 % de los partidos	85	85 de cada 100	$\frac{85}{100}$	0,85	85 por ciento
El 9 % de los alumnos superan los 13 años	9	9 de cada 100	$\frac{9}{100}$	0,09	9 por ciento

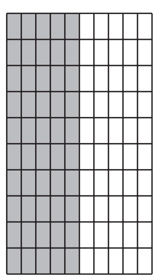
1 **Completa la siguiente tabla.**

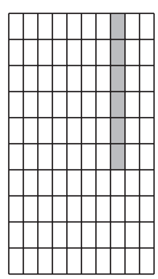
%	SIGNIFICADO	FRACCIÓN	VALOR	SE LEE
7				
			0,15	
		$\frac{38}{100}$		
	4 de cada 100			

2 **Expresa la fracción y el tanto por ciento que representa la zona coloreada.**

FRACCIÓN			
%			

a) 

b) 

c) 

PORCENTAJE DE UNA CANTIDAD

Recordando el concepto de fracción de una cantidad, el **tanto por ciento de una cantidad** se puede calcular de dos maneras:

1.ª Multiplicando la cantidad por el tanto por ciento y dividiendo entre 100.

2.ª Dividiendo la cantidad entre 100 y multiplicando por el tanto por ciento.

EJEMPLO

Enrique ha comprado unas zapatillas en las rebajas. Las zapatillas marcaban un precio de 60 €, pero le han realizado un descuento del 15% ¿Cuántos euros le han rebajado del precio inicial?

$$15\,\%\text{ de }60\begin{cases}\dfrac{(15\cdot 60)}{100}=\dfrac{900}{100}=9\text{ € le han descontado.}\\[2ex]\dfrac{60}{100}\cdot 15=0{,}6\cdot 15=9=9\text{ € le han descontado.}\end{cases}$$

Un caso particular de los tantos por ciento de una cantidad son los **aumentos** y **disminuciones porcentuales**, que consiste en sumar o restar el tanto por ciento a la cantidad a la que se le aplica.

EJEMPLO

Después de realizar el descuento al precio de las zapatillas, ¿cuánto pagó Enrique por ellas?

Una vez realizado el descuento, se resta a la cantidad lo que valía el artículo.

$60 - 9 = 51$ € Por tanto, Enrique pagó 51 € por las zapatillas.

3 **Expresa los números en porcentajes.**

a) $0{,}16 =$

b) $\dfrac{4}{5} =$

c) $0{,}03 =$

d) $\dfrac{7}{8} =$

e) $0{,}625 =$

f) $0{,}25 =$

4 **Calcula el 37,5 % de 50.**

5 **El número de chicos del total de alumnos de 1.º ESO es el 80 % del número de chicas. Si hay 30 chicas, ¿cuántos chicos son?**

Fíjate en el razonamiento:

Los chicos son el 80 % de las chicas, es decir, el 80 % de 30.

$$80\,\%\text{ de }30=\frac{80}{100}\text{ de }30=\frac{80}{100}\cdot 30=$$