

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Límite con el número e (página 255)

En el vídeo se resuelve paso a paso el límite de la sucesión:

$$a_n = \left(\frac{3n-2}{3n+7} \right)^{4n-5}$$

resolviendo la indeterminación del tipo 1^∞ .

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para calcular este tipo de límites o para que los alumnos repasen el procedimiento.

Asíntota oblicua (página 256)

En el vídeo se muestra cómo hallar la pendiente y la ordenada de

la asíntota oblicua de la función $f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ mediante el cálculo de límites.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento para determinar este tipo de asíntotas o para que los alumnos lo repasen.

$f(x) = \frac{x^2+1}{x}$ Calculamos la asíntota oblicua: $y = mx + n$

$n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2+1}{x^2} = 1$ Es un valor real no nulo.

$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - 1 \cdot x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1-x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

La asíntota oblicua de esta función es: $y = x$

Cálculo de parámetros para que una función sea continua (página 271)

En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 2.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para determinar los valores de a y b para que la función sea continua o para que los alumnos repasen este tipo procedimiento.

Actividades (páginas 239/270)

- 1** Dada la sucesión $a_n = (-1)^n \cdot \frac{3n+5}{n^2-3}$, calcula los cinco primeros términos.

Sustituyendo n por los cinco primeros números naturales, del 1 al 5, sucesivamente, se obtiene:

$$a_1 = 4, a_2 = 11, a_3 = -7/3, a_4 = 17/13, a_5 = -10/11$$

- 2** Dada la sucesión $a_n = (-n)^3$, calcula el séptimo término.

Sustituyendo por $n = 7$, se obtiene, $a_7 = -343$

- 3** Calcula el término general de las sucesiones siguientes.

a) $1, 4/3, 6/4, 8/5, \dots$

b) $0, 3/7, 8/9, 15/11, \dots$

c) $1/5, 2/9, 4/13, 8/17, \dots$

a) $a_n = \frac{2n}{n+1}$

b) $a_n = \frac{n^2-1}{2n+3}$

c) $a_n = \frac{2^{n-1}}{4n+1}$

- 4** Calcula el término general de las siguientes progresiones aritméticas.

a) $-1, -\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \dots$

b) $5, 3, 1, -1, -3, \dots$

c) $3, 1, -1, -3, -5, \dots$

a) La diferencia es $\frac{1}{4}$ y $a_1 = -1$, por lo que $a_n = \frac{n-5}{4}$

b) La diferencia es -2 y $a_1 = 5$, por lo que $a_n = 7 - 2n$

c) La diferencia es -2 y $a_1 = 3$, por lo que $a_n = 5 - 2n$

- 5** Calcula el término general de las siguientes progresiones geométricas.

a) $\sqrt{2}, 2, 2\sqrt{2}, 4, 4\sqrt{2}, 8, \dots$

b) $-3, 3, -3, 3, -3, \dots$

c) $-4, -12, -36, -108, \dots$

a) La razón es $\sqrt{2}$ y $a_1 = \sqrt{2}$, por lo que $a_n = (\sqrt{2})^n$

b) La razón es -1 y $a_1 = -3$, por lo que $a_n = (-1)^n \cdot 3$

c) La razón es 3 y $a_1 = -4$, por lo que $a_n = -4 \cdot (3)^{n-1}$

- 6** ¿Cuántos números impares consecutivos a partir de 1 suman 10 201?

Es una progresión aritmética de primer término 1 y diferencia 2, por lo que:

$$10\,201 = \frac{1+a_n}{2} \cdot n = \frac{1+1+2(n-1)}{2} \cdot n \Rightarrow 10\,201 = n^2$$

$$\Rightarrow n = 101$$

Son 101 números impares consecutivos.

- 7** En una progresión aritmética que tiene un número impar de términos, el término central es 42. ¿Qué valor tiene la suma de los términos extremos?

$$2 \cdot 42 = 84$$

- 8** Sabiendo que en una progresión aritmética $S_{15} = 75$ y la diferencia $d = \frac{1}{2}$, calcula a_8 .

$$75 = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 \Rightarrow 10 = a_1 + a_{15} = 2a_8 \Rightarrow a_8 = 5$$

- 9** Halla la suma de los 10 primeros términos de una progresión geométrica si $a_2 = 5$ y $a_{15} = \frac{45}{2^{13}}$. ¿Cuánto vale la suma de todos sus términos?

En primer lugar calculamos r :

$$r^{13} = \frac{45}{2^{13}} : 5 = \frac{9}{2^{13}} \Rightarrow r = \frac{\sqrt[13]{9}}{2}$$

Después, se calcula a_1 :

$$a_1 = 5 : \frac{\sqrt[13]{9}}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{10}{\sqrt[13]{9}}$$

Sustituyendo en la expresión para la suma de n términos de una progresión geométrica, siendo $n = 10$ y a_1 y r los valores hallados, se obtiene:

$$S_{10} = \frac{a_1(r^{10} - 1)}{r - 1} = 20,59$$

Si se desea calcular la suma de todos los términos de esta progresión, basta observar que es una progresión decreciente, puesto que $r < 1$:

$$S = \frac{a_1}{1-r} = 20,7$$

- 10** La suma de los 9 primeros términos de una progresión geométrica es 19 682 y la razón $r = 3$. Halla los nueve primeros términos de la progresión.

$$S_9 = \frac{a_1(r^9 - 1)}{r - 1} \Rightarrow 19\,682 = \frac{a_1(3^9 - 1)}{2} \Rightarrow a_1 = 2, \text{ por lo que los términos son: } 2, 6, 18, 54, 162, 486, 1\,458, 4\,374, 13\,122.$$

- 11** Sabiendo que en una progresión geométrica el producto de los 5 primeros términos es $P_5 = 2^{12} \cdot \sqrt{2}$, calcula a_3 .

Puesto que $a_1 \cdot a_5 = a_3^2$, se puede escribir:

$$2\sqrt{2} = \sqrt{(a_3^2)^5} \Rightarrow 2^{25} = a_3^{10} \Rightarrow a_3 = 2^2 \cdot 2^{5/10} = 4\sqrt{2}$$

- 12** Determina, calculando algunos de sus términos, qué tipo de sucesión es cada una de las siguientes.

a) $\frac{n+1}{n}$ c) 2^{-n+1} e) $(-2)^n$
 b) $\frac{n^2+2}{n-1}$ d) $2^{1/n}$ f) $\left(\frac{-1}{n}\right)^n$

Se calculan sus primeros términos y se obtiene:

- a) Convergente c) Convergente e) Oscilante
 b) Divergente d) Convergente f) Convergente

- 13** Copia y completa la siguiente tabla para la resta de las sucesiones x_n e y_n :

	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$	$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$	$a - b$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = +\infty$	$-\infty$	IND	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	IND

- 14** Calcula los términos 100, 1 000 y 10 000 de las siguientes sucesiones.

a) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ b) $n^{1/n}$ c) $\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ d) $\left(\frac{1}{n+1}\right)^{\frac{2}{n}}$

a) $a_{100} = 2,7048$ $a_{1\,000} = 2,7169$ $a_{10\,000} = 2,7181$
 b) $a_{100} = 1,0471$ $a_{1\,000} = 1,0069$ $a_{10\,000} = 1,0009$
 c) $a_{100} = 0,9559$ $a_{1\,000} = 0,9931$ $a_{10\,000} = 0,9991$
 d) $a_{100} = 0,9118$ $a_{1\,000} = 0,9863$ $a_{10\,000} = 0,9982$

- 15** Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + 10\,000 - n^4)$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^6 + 2n^2}{3n^6 + 2}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} [4n^3 + 2n - (5n^2 + 4)^2]$ e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 2n + 3}{1 - n^3}$
 c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{3n^2 - 2n^5}}{2n^2 + 6}$ f) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^3 + 2n - 5}{2n^2 + 5n - n^3}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-n^4) = -\infty$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (-25n^4) = -\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-n^5}{n^2}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} (-n^3) = -\infty$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{n^6}{3n^6}\right) = \frac{1}{3}$
 e) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^2}{-n^3}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-4}{n} = 0$
 f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4n^3}{-n^3}\right) = -4$

- 16** Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \frac{\sqrt{8n^2 + 2n + 3}}{\sqrt[3]{8n^3 - 5n^2 + 3}}$
 b) $b_n = \frac{\sqrt[3]{-3n^3 + 2n - 5}}{\sqrt[3]{2n^2 + 3}}$
 c) $c_n = \frac{n - 2}{\sqrt[5]{32n^5 + 8}}$
 d) $d_n = \frac{\sqrt[6]{n^5 + 4n^3}}{\sqrt[8]{2n^7 + 5n^2}}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{8n^2}}{\sqrt[3]{8n^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2n\sqrt{2}}{2n} = \sqrt{2}$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} b_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{2n^{2/3}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\sqrt[3]{3n}}{\sqrt[3]{2}} = -\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} c_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} d_n = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^{5/6}}{\sqrt[8]{2n^{7/8}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[8]{2} \cdot \sqrt[24]{n}} = 0$

- 17** Calcula los límites de las sucesiones que tienen los siguientes términos generales.

a) $a_n = \frac{\sqrt{121n^2 + 4n - 3} - \sqrt{121n^2 + 19n}}{4}$
 b) $b_n = \sqrt{25n^2 + 4n} - (5n + 3)$
 c) $c_n = \sqrt{36n^2 - 1} - \sqrt{36n^2 - 5n}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

- a) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{121n^2 + 4n - 3 - 121n^2 - 19n}{4 \cdot (\sqrt{121n^2 + 4n - 3} + \sqrt{121n^2 + 19n})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-15n}{4 \cdot 22n} = \frac{-15}{88}$$

- b) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{25n^2 + 4n - 25n^2 - 30n - 9}{\sqrt{25n^2 + 4n} + 5n + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-26n}{10n} = \frac{-13}{5}$$

- c) Multiplicando por la expresión conjugada del numerador se obtiene:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{36n^2 - 1 - 36n^2 + 5n}{\sqrt{36n^2 - 1} + \sqrt{36n^2 + 5n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5n}{12n} = \frac{5}{12}$$

- 18** Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+2}{2n-7}\right)^{n-n^2}$ c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{7n+2}{2n-5}\right)^{\frac{3}{n}}$
 b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (2n+3)^{\frac{4n-2}{2n}}$ d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sqrt{9n^2+3n-5}}{\sqrt{2n+n^2}}\right)^{\frac{2n}{n+1}}$

Para salvar la indeterminación podemos escribir:

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{2n}\right)^{-n^2} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-\infty} = 0$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} (2n)^{4n/2n} = (+\infty)^2 = +\infty$
 c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7n}{2n}\right)^{3/n} = \left(\frac{7}{2}\right)^0 = 1$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3n}{n}\right)^{2n/n} = (3)^2 = 9$

19 Calcula los siguientes límites.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+2}{2n-2} \right)^{4n+5} & \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n^2-1}{5n^2+n} \right)^{2n-2} \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n^2-7}{3n^2+2n} \right)^{\frac{4n^2+2}{3n-7}} & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{6n+4}{6n-3} \right)^{\frac{4n^2+2}{2n}} \\ \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n+7}{3n+2} \right)^{5n-9} & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n+4}{5n-4} \right)^{-n+2} \end{array}$$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n-1}{2}} \right)^{\frac{n-1}{2} \cdot (4n+5) \cdot \frac{2}{n-1}} = e^8 \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3n^2+2n}{-2n-7}} \right)^{\frac{3n^2+2n}{-2n-7} \cdot \frac{4n^2+2}{3n-7} \cdot \frac{-2n-7}{3n^2+2n}} = e^{-8/9} = \frac{1}{\sqrt[9]{e^8}} \\ \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n}{3n} \right)^{5n} = \left(\frac{2}{3} \right)^{+\infty} = 0 \\ \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n^2+n}{-n-1}} \right)^{\frac{5n^2+n}{-n-1} \cdot (2n-2) \cdot \frac{-n-1}{5n^2+n}} = e^{-2/5} = \frac{1}{\sqrt[5]{e^2}} \\ \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{6n-3}{7}} \right)^{\frac{6n-3}{7} \cdot \frac{4n^2+2}{2n} \cdot \frac{7}{6n-3}} = e^{7/3} = \sqrt[3]{e^7} \\ \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{5n-4}{8}} \right)^{\frac{5n-4}{8} \cdot (-n+2) \cdot \frac{8}{5n-4}} = e^{-8/5} = \frac{1}{e\sqrt[5]{e^3}} \end{array}$$

20 Calcula los siguientes límites.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^2+5n+2}{n^2+1} \right)^{4n} & \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{2n+1}{n+2} \right)^{-n+7} \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{2-6n} \right)^{n+6} & \text{f)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+13}{2n-2} \right)^{-1/n} \\ \text{c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{5n-4}{2+n} \right)^{1-n^2} & \text{g)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{2n}{1-2n} \right)^{\frac{4-n^2}{n+2}} \\ \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+4}{2n-2} - \frac{1}{2} \right)^{\frac{1-n^2}{n+4}} & \text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n^3+n}{n^3+1} \right)^{-2n+3} \end{array}$$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

$$\begin{array}{l} \text{a)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^2+1}{5n+1}} \right)^{\frac{n^2+1}{5n+1} \cdot 4n \cdot \frac{5n+1}{n^2+1}} = e^{20} \\ \text{b)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{6n-2}{3}} \right)^{\frac{6n-2}{3} \cdot (n+6) \cdot \frac{3}{6n-2}} = \sqrt{e} \\ \text{c)} 5^{-\infty} = 0 \\ \text{d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{2n-2}{7}} \right)^{\frac{2n-2}{7} \cdot \frac{1-n^2}{n+4} \cdot \frac{7}{2n-2}} = e^{-7/2} = \frac{1}{e^3\sqrt{e}} \\ \text{e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n+2}{3}} \right)^{\frac{n+2}{3} \cdot (-n+7) \cdot \frac{3}{n+2}} = e^{-3} = \frac{1}{e^3} \\ \text{f)} \left(\frac{1}{2} \right)^0 = 1 \\ \text{g)} 2^{-\infty} = 0 \end{array}$$

$$\text{h)} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{n^3+1}{n-1}} \right)^{\frac{n^3+1}{n-1} \cdot (-2n+3) \cdot \frac{(n-1)}{n^3+1}} = e^0 = 1$$

21 Determina los límites en el infinito de las siguientes funciones y escribe la ecuación de sus asíntotas horizontales.

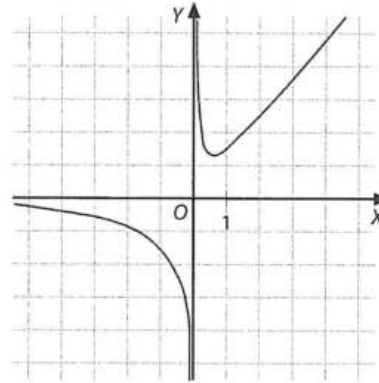


Figura 9.9.

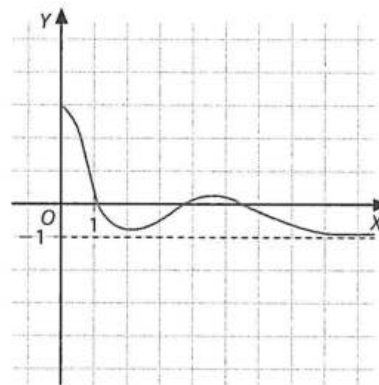


Figura 9.10.

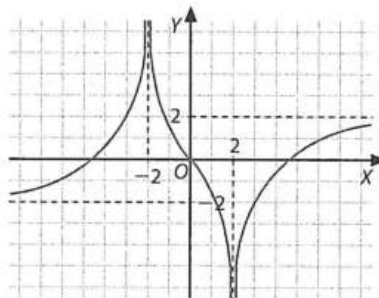


Figura 9.11.

Figura 9.9: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

Tiene una asíntota horizontal por la izquierda ($y = 0$).

Figura 9.10: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

Tiene una asíntota horizontal por la derecha ($y = -1$).

Figura 9.11: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$.

Tiene una asíntota horizontal por la derecha ($y = 2$) y otra por la izquierda ($y = -2$).

22 Calcula la ecuación de las asíntotas horizontales, si las tienen, de las siguientes funciones.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} f(x) = \frac{1-2x^2}{x^2-1} & \text{c)} f(x) = \frac{x^2+1}{x^3} \\ \text{b)} f(x) = \frac{3x-1}{2x+1} & \text{d)} f(x) = \frac{\sqrt{4x^2+1}}{2x+2} \end{array}$$

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -2$, luego, asíntota horizontal $y = -2$.

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 3/2$, luego, asíntota horizontal $y = 3/2$.

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, luego, asíntota horizontal $y = 0$.

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$, luego, asíntota horizontal por la izquierda $y = -1$, y por la derecha $y = 1$.

23 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x+1}{7x^2} \cdot \frac{x^2}{x-1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^{\frac{x^2+1}{2x^2}}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x+1}{2x-3} \right)^{x+1}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^3 - 5x + 1}{3x^3 - 2x^2 + 5} \right)^{-x+1}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - 1})$

g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x^2 - 2} - 2x)$

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+1} \right)^{-6x}$

i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2 - 1}{2x^2 - 2x + 1} \right)^{x+1}$

j) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^4 + 3})$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) Indeterminación $0 \cdot \infty$

Para resolver el límite, primero multiplicamos y después simplificamos ambas funciones:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{7x^3} = \frac{1}{7}$$

b) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^x = \left(\frac{5}{2} \right)^{+\infty} = +\infty$$

c) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{5}{2} \right)^x = \left(\frac{5}{2} \right)^{-\infty} = 0$$

d) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x = \left(\frac{1}{2} \right)^{+\infty} = 0$$

e) Indeterminación ∞/∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^{-x} = \left(\frac{2}{3} \right)^{-\infty} = +\infty$$

f) Indeterminación $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{2x} = \frac{1}{2}$$

g) Indeterminación $\infty - \infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{4x} = 0$$

h) Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{3x-1} \right)^{\frac{3x-1}{-3} \cdot (-6x) \cdot \frac{-3}{3x-1}} = e^6$$

i) Indeterminación 1^∞

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{2x^2 - 2x - 1} \right)^{\frac{2x^2 - 2x - 1}{-2x - 2} \cdot (x+1) \cdot \frac{-2x-2}{2x^2 - 2x - 1}} = \frac{1}{e}$$

j) Indeterminación $\infty - \infty$

$-\infty$

24 Halla lo que se indica en cada apartado.

a) Figura 9.26: Dom f , Rec f , $f(0)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Figura 9.27: Dom f , Rec f , $f(0)$, $f^{-1}(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

c) Figura 9.28: Dom f , Rec f , $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

e) Figura 9.29: Dom f , Rec f , $f(1)$, $f(3/2)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

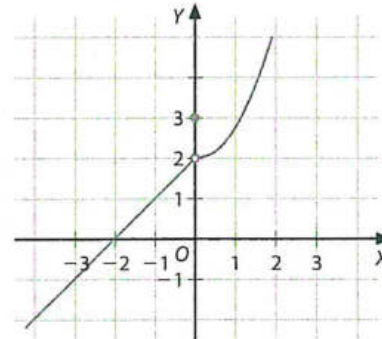


Figura 9.26.

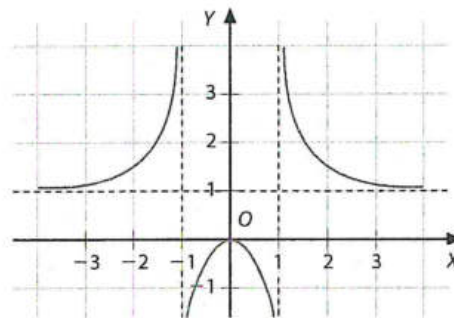


Figura 9.27.

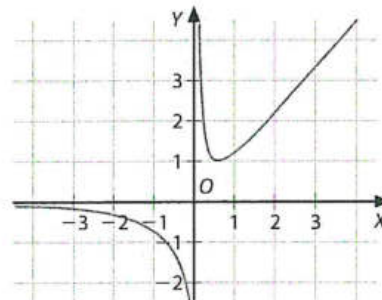


Figura 9.28.

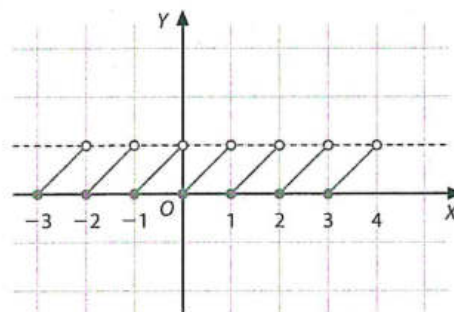


Figura 9.29.

Figura 9.26: Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = \mathbb{R} - \{2\}$, $f(0) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Figura 9.27: Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, Rec $f = \mathbb{R} - (0, 1)$, $f(0) = 0$, $\nexists f^{-1}(1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$.

Figura 9.28: Dom $f = \mathbb{R} - \{0\}$, Rec $f = \mathbb{R} - [0, 1)$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Figura 9.29: Dom $f = \mathbb{R}$, Rec $f = [0, 1)$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 1} f(x)$, $\nexists \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

25 Estudia el límite de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = -3x + 5$, en $x=0$ y en $x=3$

b) $f(x) = x^3$, en $x=0$ y en $x=\sqrt{3}$

c) $f(x) = |x - 2|$, en $x=2$ y en $x=-3$

d) $f(x) = x + E(x)$, en $x=2$ y en $x=-1$

e) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x - 2}$, en $x=-2$ y en $x=-1$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ en $x=-2$, en $x=2$ y en $x=4$

g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ (x + 1)/(x + 3) & \text{si } x > -2 \end{cases}$ en $x=-3$, en $x=-2$ y en $x=5$

a) $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x + 5) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 3} (-3x + 5) = -4$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 = 0$, $\lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} x^3 = \lim_{x \rightarrow \sqrt{3}} 3\sqrt{3}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} |x - 2| = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3} |x - 2| = 5$

d) $\lim_{x \rightarrow 2^-} [x + E(x)] = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} [x + E(x)] = 4$, $\nexists \lim_{x \rightarrow 2} [x + E(x)]$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} [x + E(x)] = -3$, $\lim_{x \rightarrow -1^+} [x + E(x)] = -2$,

$\nexists \lim_{x \rightarrow -1} [x + E(x)]$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$

f) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 + 1) = 5$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (x^2 + 1) = 5$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x + 3) = 5$.

Así, $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 5$.

$\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4} (x + 3) = 7$

g) $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3} (3x - 1) = -10$

$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} (3x - 1) = -7$, $\nexists \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$. Así, $\nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

$\nexists \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x)$, así $\nexists \lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

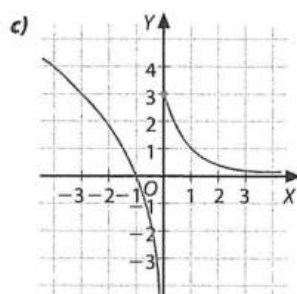
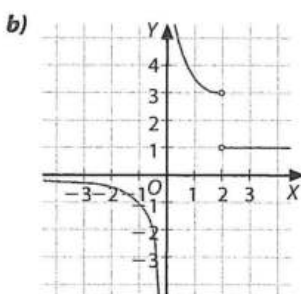
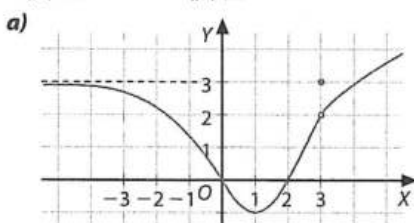
26 Construye gráficas que cumplan las siguientes condiciones.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, +\infty)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$,
 $f(3) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$, $f^{-1}(0) = \{0, 2\}$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{0, 2\}$, $\text{Rec } f = (-\infty, 0) \cup \{1\} \cup (3, +\infty)$,
 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

(Ten en cuenta que $f(x) < 0$ si $x < 0$, $f(x) > 0$ si $x > 0$.)

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$



27 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) \cdot \left(1 + \frac{1}{x - 2} + \frac{1}{(x - 2)^2} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x + 1}{x^2 - 16} - \frac{x}{x - 4} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{x + 4} - 2}{x} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2 - 4x - 5}{x^2 - 1} \right)^{2x+1}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(x - 2 + 1 + \frac{1}{x - 2} \right) = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \left(x^2 - 3x + \frac{1}{x^2 - 16} \right) = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x + 4 - 4}{x(\sqrt{x + 4} - 2)} \right) = \frac{1}{4}$

d) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x - 5}{x - 1} \right)^{2x+1} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$

28 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x - 4}$

b) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x}{(x - 4)^2}$

c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 3}$

d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x}{x - 2}$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{(4 + 2x)^3}$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 7^{1/x}$

Para salvar la indeterminación, en cada caso, podemos escribir:

a) ∞

b) $+\infty$

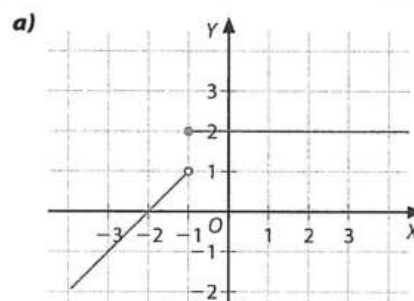
c) $\frac{0}{5} = 0$

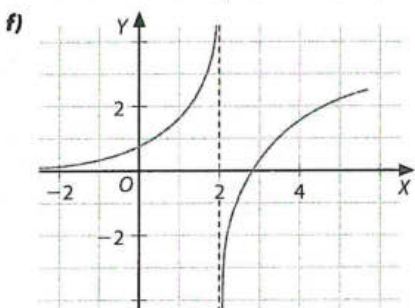
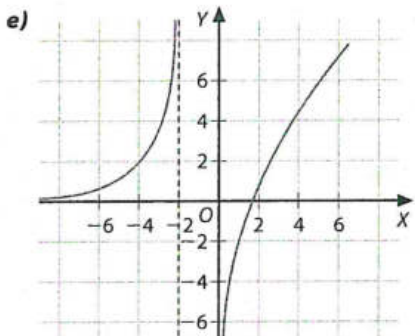
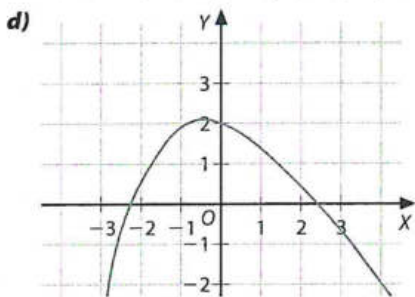
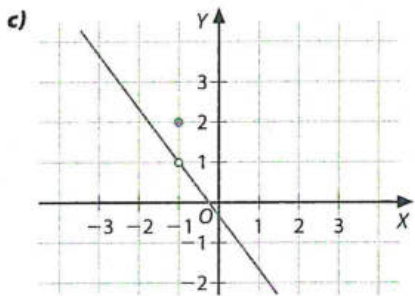
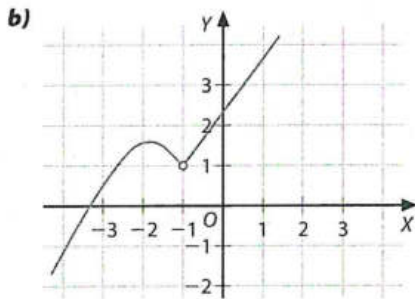
d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3}{x} \right) = +\infty$

e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^3}{8x^3} \right) = \frac{1}{8}$

f) $7^0 = 1$

29 Indica el dominio de continuidad de estas funciones.





- a) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$
 b) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$
 c) Continua en $\mathbb{R} - \{-1\}$
 d) Continua en \mathbb{R}
 e) Continua en $(-\infty, -2) \cup (0, +\infty)$
 f) Continua en $\mathbb{R} - \{2\}$

30 Clasifica las discontinuidades de las funciones anteriores.

- a) Discontinuidad de salto finito en $x = -1$
 b) Discontinuidad evitable en $x = -1$
 c) Discontinuidad evitable en $x = -1$
 e) Discontinuidades asintóticas en $x = -2$ y $x = 0$
 f) Discontinuidad asintótica en $x = 2$

31 Analiza la continuidad de las siguientes funciones.

- a) $f(x) = -3x + 5$
 b) $f(x) = x^3$
 c) $f(x) = |x - 2|$
 d) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x + 2}$
 e) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 2 \\ x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$
 g) $f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{si } x \leq -2 \\ \frac{x + 1}{x + 3} & \text{si } x > -2 \end{cases}$
 h) $f(x) = \begin{cases} |x| & \text{si } x \leq -3 \\ -2x - 3 & \text{si } x > -3 \end{cases}$

- f) $f(x) = x + E(x)$
 a) Continua en \mathbb{R}
 b) Continua en \mathbb{R}
 c) Continua en \mathbb{R}
 d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2\}$. Puesto que es una función racional es continua en su dominio. En $x = -2$, $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable, puesto que:

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} (x + 1) = 3$$

- e) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$. Puesto que:
 $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 5 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x)$, la función es continua en \mathbb{R} .
 f) Continua en $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. En $x \in \mathbb{Z}$ presenta discontinuidad de salto.
 g) $\text{Dom } f = (-\infty, -2] \cup (5, +\infty)$. Puesto que las funciones son polinómica y racional, respectivamente en $(-\infty, -2]$ y $(5, +\infty)$, es continua en su dominio.
 h) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - (-3, 2]$. La función es continua en su dominio.

Ejercicios y problemas (páginas 274/278)

Sucesiones. Progresiones aritméticas y geométricas

1 Calcula el término general de las siguientes sucesiones y di si son convergentes, divergentes u oscilantes.

- a) 3, 7, 11, 15, 19, ...
 b) 2, 6, 18, 54, 162, ...
 c) 1, 3/2, 2, 5/2, 3, ...
 d) 1/2, 2/3, 3/4, 4/5, 5/6, ...
 e) 4, 2, 1, 1/2, 1/4, ...
 a) $a_n = 4n - 1$, divergente.
 b) $a_n = 2 \cdot 3^{n-1}$, divergente.
 c) $a_n = \frac{n+1}{2}$, divergente.
 d) $a_n = \frac{n}{n+1}$, convergente.
 e) $a_n = 2^{3-n}$, convergente.

2 Halla el término general de las siguientes sucesiones e indica si son convergentes, divergentes u oscilantes.

- a) 1, 3/4, 5/9, 7/16, ...
 b) 2, 5, 10, 17, 26, ...
 c) 10, 26, 50, 82, ...
 d) -1/2, 1/5, 3/8, 5/11, ...
 e) -2, 4, -8, 16, ...
 a) $a_n = \frac{2n-1}{n^2}$, convergente.
 b) $a_n = n^2 + 1$, divergente.
 c) $a_n = (2n+1)^2 + 1$, divergente.
 d) $a_n = \frac{2n-3}{3n-1}$, convergente.
 e) $a_n = (-1)^n \cdot 2^n = (-2)^n$, oscilante.

12 Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \left(\frac{10}{3n+3}\right) \cdot (-6n)$

b) $b_n = \left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(\frac{4n+2}{2n-1}\right) \cdot \left(6 + \frac{1}{n^2}\right)$

c) $c_n = \left(\frac{3n-1}{2n+4} - \frac{11n+3}{10n^2+5}\right)$

d) $d_n = [(n+1)^2 - (n-2)^2]$

e) $e_n = \left(\frac{5n+1}{7n-4}\right) \cdot \left(\frac{7n^2+5}{5n^2-9}\right)$

f) $f_n = \left(\frac{n^2}{n^3} + \frac{n^3}{n^2}\right)$

a) $\lim a_n = \lim \left[\frac{10}{3n+3} \cdot (-6n)\right] = -20$

b) $\lim b_n = \lim \left[\left(2 + \frac{3}{n}\right) \cdot \left(\frac{4n+2}{2n-1}\right) \cdot \left(6 + \frac{1}{n^2}\right)\right] = 24$

c) $\lim c_n = \lim \left(\frac{3n-1}{2n+4} - \frac{11n+3}{10n^2+5}\right) = \frac{3}{2}$

d) $\lim d_n = \lim [(n+1)^2 - (n-2)^2] = +\infty$

e) $\lim e_n = \lim \left(\frac{5n+1}{7n-4} - \frac{7n^2+5}{5n^2-9}\right) = 1$

f) $\lim f_n = \lim \left(\frac{n^2}{n^3} + \frac{n^3}{n^2}\right) = +\infty$

13 Calcula los límites de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \frac{\sqrt{n^3+n^2+1}}{3\sqrt{n^3+2n^2-7}}$

b) $b_n = \frac{2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}}{\sqrt{9n} + 3\sqrt[3]{n} + 5\sqrt[4]{n}}$

c) $c_n = \sqrt[3]{n^4+4} - \sqrt[4]{n^3+3}$

d) $d_n = \sqrt[3]{n^7-10^6}$

e) $e_n = \sqrt{13n^2-4} - \sqrt{6n^2+5}$

f) $f_n = \sqrt{13n^2-4} - \sqrt{7n^3+10n}$

a) $\lim (\sqrt{n^3+n^2+1}) / (3\sqrt{n^3+2n^2-7}) = 1/2$

b) $\lim [(2\sqrt{n} + \sqrt[3]{n} + \sqrt[4]{n}) / (\sqrt{9n} + 3\sqrt[3]{n} + 5\sqrt[4]{n})] = 2/3$

c) $\lim (\sqrt[3]{n^4+4} - \sqrt[4]{n^3+3}) = +\infty$

d) $\lim (\sqrt[3]{n^7-10^6}) = +\infty$

e) $\lim (\sqrt{13n^2-4} - \sqrt{6n^2+5}) = +\infty$

f) $\lim (\sqrt{13n^2-4} - \sqrt{7n^3+10n}) = -\infty$

14 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2}$

b) $b_n = 1 / (\sqrt{19n^2} - \sqrt{19n^2+3n})$

c) $c_n = \sqrt{6n^2+3} - (6n+2)$

d) $d_n = \sqrt{16n^2+5} - (4n-9)$

e) $e_n = (\sqrt{25n^2+3} - \sqrt{25n^2-5n}) / 10$

a) $\lim a_n = \lim (\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2-2n}) = 1$

b) $\lim b_n = \lim [1 / (\sqrt{19n^2} - \sqrt{19n^2+3n})] = -2\sqrt{19}/3$

c) $\lim c_n = \lim [\sqrt{6n^2+3} - (6n+2)] = -\infty$

d) $\lim d_n = \lim [\sqrt{16n^2+5} - (4n-9)] = 9$

e) $\lim e_n = \lim [(\sqrt{25n^2+3} - \sqrt{25n^2-5n}) / 10] = 1/20$

15 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = (3n+2)^{\frac{-3n+2}{2n+3}}$

d) $d_n = \left(10 + \frac{10}{n}\right)^{10n}$

b) $b_n = \left(\frac{6}{6n^2+2}\right)^{\sqrt{(25n^2-5)/n^2}}$

e) $e_n = \left(\frac{3+5/n^5}{6+6/n^6}\right)^{\frac{3n}{2+n}}$

c) $c_n = \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n}$

f) $f_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n-1}}$

a) $\lim a_n = \lim (3n+2)^{\frac{-3n+2}{2n+3}} = (+\infty)^{-3/2} = 0$

b) $\lim b_n = \lim \left(\frac{6}{6n^2+2}\right)^{\sqrt{(25n^2-5)/n^2}} = 0^5 = 0$

c) $\lim c_n = \lim \left(\frac{3n+2}{4n-1}\right)^{3n} = (3/4)^{+\infty} = 0$

d) $\lim d_n = \lim \left(10 + \frac{10}{n}\right)^{10n} = 10^{+\infty} = +\infty$

e) $\lim e_n = \lim \left(\frac{3+5/n^5}{6+6/n^6}\right)^{\frac{3n}{2+n}} = \frac{1}{8}$

f) $\lim f_n = \lim \sqrt{\frac{2n+1}{n-1}} = \sqrt{2}$

16 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$

d) $d_n = \frac{(-n)^n}{2n^2+3}$

b) $b_n = \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-19}$

e) $e_n = \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{n+7}$

c) $c_n = \left(n + \frac{1}{n^2}\right)^6$

f) $f_n = \left(\frac{n^2+7}{2n}\right)^{\frac{3n+7}{2n}}$

a) $\lim a_n = \lim \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} = 2^{1/\infty} = 2^0 = 1$

b) $\lim b_n = \lim \left(\frac{2n+1}{2n-1}\right)^{3n-19} = 1^\infty =$

$= \lim \left(1 + \frac{1}{2n-1}\right)^{\frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2}{2n-1} \cdot (3n-19)} = e^{\lim \frac{6n}{2n}} = e^3$

c) $\lim c_n = \lim \left(n + \frac{1}{n^2}\right)^6 = +\infty$

d) Es una sucesión oscilante, no tiene límite.

e) $\lim e_n = \lim \left(1 - \frac{3}{n+1}\right)^{n+7} = \frac{1}{e^3} = e^{-3}$

f) $\lim f_n = \lim \left(\frac{n^2+7}{2n}\right)^{\frac{3n+7}{2n}} = +\infty$

17 Calcula el límite de las siguientes sucesiones.

a) $a_n = \left(\frac{n^2+7}{n^2}\right)^{2n-7}$

d) $d_n = \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{n^2}$

b) $b_n = \left(\frac{7n-3}{7n+3}\right)^{n-3}$

e) $e_n = \left(\frac{6n+6}{6n-6}\right)^{-n+2}$

c) $c_n = \left(\frac{\sqrt{n}}{n+3}\right)^{\frac{-5n}{n+1}}$

f) $f_n = \left(1 - \frac{5}{n}\right)^{5n+5}$

a) $\lim a_n = \lim \left(\frac{n^2+7}{n^2}\right)^{2n-7} = e^0 = 1$

b) $\lim b_n = \lim \left(\frac{7n-3}{7n+3}\right)^{n-3} = \frac{1}{\sqrt[7]{e^6}}$

c) $\lim c_n = \lim \left(\frac{\sqrt{n}}{n+3}\right)^{\frac{-5n}{n+1}} = \left(\frac{1}{\infty}\right)^{-5} = +\infty$

d) $\lim d_n = \lim \left(\frac{2n}{2n+2}\right)^{n^2} = e^{-\infty} = 0$

$$e) \lim e_n = \lim \left(\frac{6n+6}{6n-6} \right)^{-n+2} = e^{-2}$$

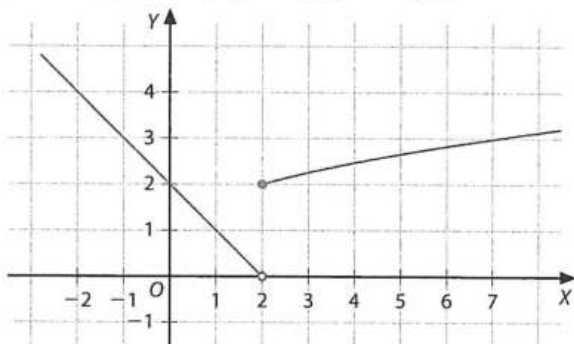
$$f) \lim f_n = \lim \left(1 - \frac{5}{n} \right)^{5n+5} = \frac{1}{e^{25}} = e^{-25}$$

Límites de funciones en el infinito

18 Dadas las siguientes funciones, averigua los límites que se indican.

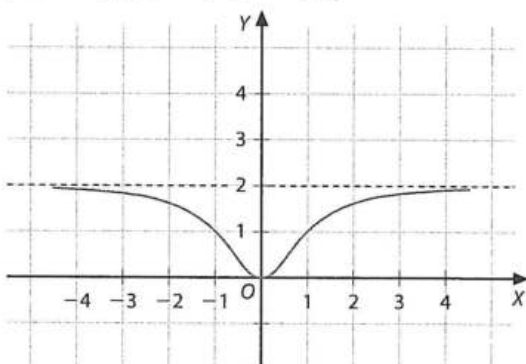
$$a) f(x) = \begin{cases} -x+2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x+2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x), \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x), \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$



$$b) f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$



$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

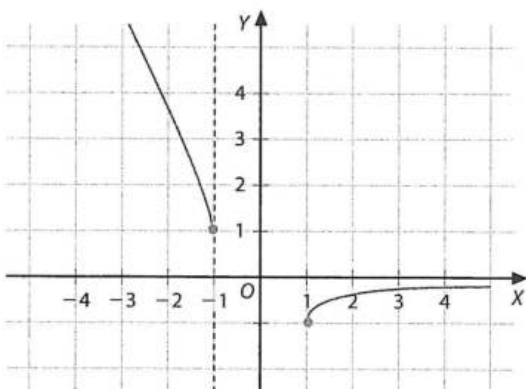
$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 2 \quad \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

19 Averigua los límites que se indican.

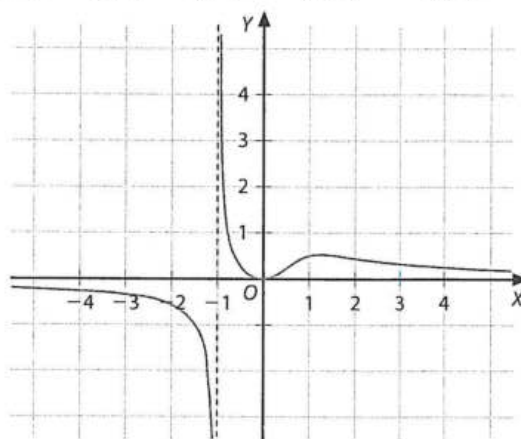
$$a) f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$



$$b) f(x) = \frac{x^2}{x^3+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow -1} f(x).$$



$$a) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 1 \quad \nexists \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$$

20 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4) = -\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7) = +\infty$$

21 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - x^2 + 2x - 5) = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-3x^4 + 3x^3 - 7x^2 - 2x + 9) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^5 - 4x^3 - x + 4) = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^6 + 3x^3 - 3x + 7) = +\infty$$

22 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x^3 + 3x - 3}{x^2 + 5x - 2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(3-5x)^2}{-9x^2 - x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 7x - 8}{x^4 - 4x^2 + 6}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2 + 5x - 1}{3 - 5x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-3x^3 + 3x - 3)/(x^2 + 5x - 2)] = -\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(3-5x)^2/(-9x^2 - x)] = -25/9$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(x^3 + 3x^2 + 7x - 8)/(x^4 - 4x^2 + 6)] = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2 + 5x - 1)/(3 - 5x)] = +\infty$$

23 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-3x^3 + 3x - 3}{x^2 + 5x - 2} \right] = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(3 - 5x)^2}{-9x^2 - x} \right] = -\frac{25}{9}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{x^3 + 3x^2 + 7x - 8}{x^4 - 4x^2 + 6} \right] = 0$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{-x^2 + 5x - 1}{3 - 5x} \right] = -\infty$$

24 Calcula los límites de las siguientes funciones.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1})$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2})$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5})$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x)$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = 0$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}) = -\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2})$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$$

$$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

No existe, porque $\text{Dom } f = \left[\frac{2}{3}, 1 \right)$ y no está definida para valores que vayan a $+\infty$.

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5}) = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x) = \frac{1}{2}$$

25 Calcula el límite de las funciones de la actividad anterior cuando $x \rightarrow -\infty$.

$$a) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x^2 + 4} - \sqrt{3x^2 - 1}) = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - x} - \sqrt{3x - 2})$$

$$1 - x > 0 \Rightarrow x < 1$$

$$3x - 2 > 0 \Rightarrow x > \frac{2}{3}$$

No existe, porque $\text{Dom } f = \left[\frac{2}{3}, 1 \right)$ y no está definida para valores que vayan a $-\infty$.

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{2x + 5} - \sqrt{2x - 5})$$

$$2x + 5 > 0 \Rightarrow x > -\frac{5}{2}$$

$$2x - 5 > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{2}$$

No existe, porque $\text{Dom } f = \left[\frac{5}{2}, +\infty \right)$ y no está definida para valores que vayan a $-\infty$.

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{16x^2 + 4x} - 4x) = +\infty$$

26 Calcula los límites de las siguientes funciones.

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{\frac{3x}{x^2 - 1}}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{\frac{3x}{x^2 - 1}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + 1}{5x - 3} \right)^{-x + 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x + 1}{5x - 3} \right)^{-x + 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x + 5} - \frac{x^2 + 2}{x - 5} \right)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\left(\frac{x}{9 + x^2} \right) \cdot \left(\frac{3x + x^2}{2x + 1} \right) \right]$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{2x + 2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{x + 3}{3 - 2x^2} \right)^{-x^2}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{x - 1}{2x + 2} \right)^{\frac{3 - x^2}{x}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4})$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4})$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x}}{\sqrt{2x}}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow +\infty} 2^{3x/(x^2 - 1)} = 2^0 = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} 2^{3x/(x^2 - 1)} = 1$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{(2x + 1)}{(5x - 3)} \right]^{-x + 3} = \left(\frac{2}{5} \right)^{-\infty} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{(2x + 1)}{(5x - 3)} \right]^{-x + 3} = \left(\frac{2}{5} \right)^{+\infty} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x^2}{x + 5} - \frac{x^2 + 2}{x - 5} \right] = -10$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{x}{9 - x^2} \right] \cdot \left[\frac{3x + x^2}{2x + 1} \right] = -\frac{1}{2}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{3x + 1}{3x} \right)^{2x + 2} = \sqrt[3]{e^2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 - \frac{x + 3}{3 - 2x^2} \right]^{-x^2} = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{1}{2} + \frac{x - 1}{2x + 2} \right]^{\frac{3 - x^2}{x}} = e$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}) = -2$$

$$k) \lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1 - \sqrt{4x^2 + 4x + 4}) = -\infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3x^2 - 1}}{3x} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x})/\sqrt{2x} = 0$$

Límites de funciones en un punto

27 Halla los límites laterales de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

$$a) f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x - 1 & \text{si } x < 0 \\ (x-1)^2 + 2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \text{ y en } x = 3$$

$$b) f(x) = \frac{x^3 - x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4} \quad \text{en } x = 2$$

$$c) f(x) = \begin{cases} \frac{1-3x}{x} & \text{si } x < 1 \\ \frac{-x-1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases} \quad \text{en } x = 0 \text{ y en } x = 1$$

$$d) f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1|}{x+1} & \text{si } x \leq 3 \\ \frac{1}{3-x} & \text{si } x > 3 \end{cases} \quad \text{en } x = -1 \text{ y en } x = 3$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 3 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 6$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)(x+1)}{(x-2)^2} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -2 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -1} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 3} f(x)$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -1} \left(1 + \left(\frac{1}{x}\right)^x\right) = (0^+)^{-1} = \left(\frac{1}{0^+}\right) = +\infty$$

28 Calcula los siguientes límites.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + x^2 - x + 1}{1 - x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{3}{(x+1)^3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^5 - x^3}{x^6}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}{x^2 - x - 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{2x^3 - x^2 - 2x + 1}{6x^3 + 3x^2 - 3x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 9}{2x + 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 2x^2 + x}{x^2 + x}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{4x^2 + 4x}{x^2 + 2x - 1}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{-x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{4x^2 - 1}{2x^3 + 3x^2 - 2x}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} [(x^3 + x^2 - x + 1)/(1 - x)] = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} \right) = -\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 1}} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^2 - 2x + 1} \right) = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -1} [3/(x+1)^3] = -\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -1}} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} 3/(x+1)^3 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} [3/(x+1)^3] = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} [(x^5 - x^3)/x^6] = +\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0}} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - x^3)/x^6 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [(x^5 - x^3)/x^6] = -\infty$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} [(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)/(x^2 - x - 2)] = 0$$

$$f) \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \right) = -\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow -2}} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \right) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - x - 2}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} \right) = \infty$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 1/2} [(2x^3 - x^2 - 2x + 1)/(6x^3 + 3x^2 - 3x)] = -1/3$$

$$h) \lim_{x \rightarrow -2} [(x^2 - 9)/(2x + 1)] = 5/3$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} [(x^3 - 2x^2 + x)/(x^2 + x)] = 1$$

$$j) \lim_{x \rightarrow -2} [(4x^2 + 4x)/(x^2 + 2x - 1)] = -8$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x} \right) = +\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 3}} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \left(\frac{-x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x} \right) = -\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{-x^3 + 2x}{x^3 - 2x^2 - 3x} \right) = \infty$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 1/2} [(4x^2 - 1)/(2x^3 + 3x^2 - 2x)] = 8/5$$

29 Calcula los siguientes límites en los puntos que se indican.

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{x^2}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-\frac{1}{x^2}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{\frac{1}{x}}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-\frac{1}{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} (2x + 1/3)^{\frac{1}{x-2}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)^{-x+1}$$

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x^2} = +\infty$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-1/x^2} = 0$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x} = 0 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0}} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} 2^{1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{1/x} = +\infty$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-1/x} = +\infty \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 0}} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 0} 2^{-1/x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} 2^{-1/x} = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 2} [2x + (1/3)]^{1/(x-2)} = 0 \left. \vphantom{\lim_{x \rightarrow 2}} \right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} [2x + (1/3)]^{1/(x-2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} [2x + (1/3)]^{1/(x-2)} = +\infty$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 1)^{-x+1} = 1$$

30 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2-1} \right)$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right)$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2-x} \right)$

e) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x} \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} \right) = -\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{3x}{x^2-1} \right) = \infty$

b) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2-1} \right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2-1} \right) = +\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{3}{x+1} - \frac{2x+2}{x^2-1} \right) = \infty$

c) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) = +\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) = -\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{1}{x^2-1} - \frac{2}{x+1} \right) = \infty$

d) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+1}{x^2-x} \right) = 2$

e) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x} \right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow -2^+} \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x} \right) = +\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x+3}{x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x} \right) = \infty$

f) $\lim_{x \rightarrow 2^-} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) = -\infty$
 $\lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) = +\infty$
 $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x} \right) = \infty$

31 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2-4}{x-2}}$ c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x+2}{\sqrt{x^2-4}}$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{\frac{x^2-9}{4x-12}}$ d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{\frac{x+2}{x^2-4}}$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{(x^2-4)/(x-2)} = 2$

b) $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{(x^2-9)/(4x-12)} = \sqrt{3/2} = \sqrt{6}/2$

c) $\lim_{x \rightarrow -2^-} (x+2)/\sqrt{x^2-4} = 0$

d) $\lim_{x \rightarrow -2^+} \sqrt{\frac{x+2}{x^2-4}} = +\infty$

32 Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^3-2x}{x^2-3x-1} \right)^{2x+5}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2+3x+1)^{\frac{-5}{(x-2)^7}}$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left(\frac{x^2+4x+3}{x^2+1} \right)^{x-2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{2x+2}{x} \right)^{\frac{-1}{x+2}}$

a) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^3-2x}{x^2-3x-1} \right] = \frac{1}{27}$

b) $\lim_{x \rightarrow 2} (2x^2+3x+1)^{-5/(x-2)^7} = 0$

c) $\lim_{x \rightarrow -1} \left[\frac{x^2+4x+3}{x^2+1} \right]^{x-2} = +\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \left[\frac{2x+2}{x} \right]^{-1/(x+2)} = \sqrt{e}$

Asíntotas

33 Indica el dominio de las funciones de los ejercicios 18 y 19 y calcula analíticamente las asíntotas horizontales y verticales de las funciones representadas, en caso de que las tengan.

Ejercicio 18

a) $f(x) = \begin{cases} -x+2 & x < 0 \\ \sqrt{x+2} & x \geq 0 \end{cases}$

No tiene asíntotas horizontales ni verticales.

Dom = $\{x \in \mathbb{R}, x < 0 \mid \exists (-x+2)\} \cup \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \mid x+2 \geq 0\} = \mathbb{R}$

b) $f(x) = 2x^2/(x^2+1)$

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$, asíntota horizontal en $y = 2$.

No tiene asíntotas verticales.

Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2+1 \neq 0\} = \mathbb{R}$

Ejercicio 19

a) $f(x) = \sqrt{x^2-1} - x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, asíntota horizontal por la derecha $y = 0$.

No tiene asíntotas verticales.

Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2-1 \geq 0\} = \mathbb{R} - (-1, 1)$

b) $f(x) = x^2/(x^3+1)$

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \infty$, asíntota vertical en $x = -1$.

$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$, asíntota horizontal en $y = 0$.

Dom $f = \{x \in \mathbb{R} \mid x^3+1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{-1\}$

34 Determina la ecuación de todas las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{2}{x^2-x}$

d) $f(x) = \frac{x^2-3}{x+1}$

b) $f(x) = \frac{2x}{(4-x)^2}$

e) $f(x) = \frac{2x^2}{x^2-3x+2}$

c) $f(x) = \frac{x^2}{2x^2+5}$

f) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$

a) A.V.: $x = 0, x = 1$; A.H.: $y = 0$

b) A.V.: $x = 4, x = 1$; A.H.: $y = 0$

c) A.H.: $y = 1/2$

d) A.V.: $x = -1, x = 1$; A.H.: $y = x - 1$

e) A.V.: $x = 1, x = 2$; A.H.: $y = 2$

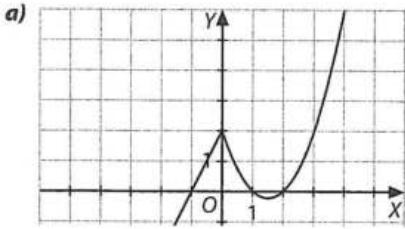
f) A.V.: $x = 1, x = -1$; A.H.: $y = 1$ cuando x tiende a $+\infty$, $y = -1$ cuando x tiende a $-\infty$.

Continuidad de funciones

35 Considera la función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 3x + 2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

a) Dibuja la gráfica. b) Estudia la continuidad.



b) $\exists f(0) = 2$

$\exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x)?$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (2x + 2) = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 3x + 2) = 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$$

$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2$

Como ya podíamos apreciar en el gráfico, la función es continua en $x = 0$.

La función $f(x)$ presenta una discontinuidad evitable en $x = 5$, se evitaría imponiendo $f(5) = 15$.

36 Dada la función: $f(x) = \frac{2x + 2}{x^4 - x^3 - 2x^2}$

a) Halla el límite en $x \rightarrow -1$, en $x \rightarrow 2$ y en $x \rightarrow 0$.

b) Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

c) Indica qué valor debería tomar $f(x)$ en $x = -1$ para evitar la discontinuidad.

d) Indica sus asíntotas.

e) Estudia su signo.

$$a) \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x + 2}{x^4 + x^3 - 2x^2} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x + 1)}{x^2(x + 1)(x - 2)} = -\frac{2}{3}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x + 2}{x^4 - x^3 - 2x^2} &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x + 2}{x^4 - x^3 - 2x^2} &= +\infty \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x + 2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x + 2}{x^4 - x^3 - 2x^2} = -\infty$$

b) y d) $f(x)$ es continua en $\mathbb{R} - \{0, -1, 2\}$

En $x = 0$ d. a. $\Rightarrow x = 0$ a. v.

En $x = 2$ d. a. $\Rightarrow x = 2$ a. v.

En $x = -1$ d. e.

En $y = 0$ a. h. puesto que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

c) $f(-1) = -2/3$

e) $x^4 - x^3 - 2x^2 = x^2(x^2 - x - 2)$

	-1	0	2
x^2	+	+	+
$x^2 - x - 2$	+	-	+
$x^4 - x^3 - 2x^2$	+	-	+

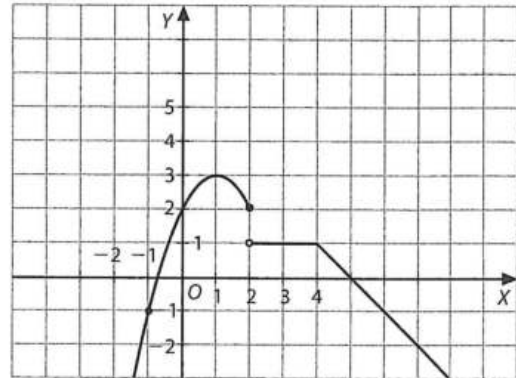
	-1	2
$2x + x$	-	+
$x^4 - x^3 - 2x^2$	+	+
$2x + 2$	-	+
$x^4 - x^3 - 2x^2$	-	+

37 Estudia la continuidad de la función:

$$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 3 & \text{si } x \leq 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x < 4 \\ -x + 5 & \text{si } x \geq 4 \end{cases}$$

a) Representála.

b) Clasifica sus discontinuidades, si las tuviera.



En $x = 2$, $f(2) = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = 1 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

En $x = 4$, $f(4) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 1$$

En $x = 2$, discontinuidad de salto.

38 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si } x \leq -2 \\ |x - 1| & \text{si } -2 < x < 2 \\ ((1-x)/x) - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

Dom $f = \mathbb{R}$

En $x < 2$, f es continua por ser función polinómica.

En $-2 < x < 2$ f es continua por ser valor absoluto de un polinomio.

En $x > 2$ f es continua por ser una función racional continua en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$f(-2) = -3$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = -3 \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = 3 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow -2} f(x)$$

$f(2) = -7/2$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -7/2 \Rightarrow \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

Continua en $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$

En $x = -2$ y $x = 2$ discontinuidad de salto.

39 Dada la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x + 1}{x + 1} & \text{si } x < 0 \\ \frac{x^2 - 2x - 3}{x - 3} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

Estudia su continuidad y clasifica sus discontinuidades.

Dom $f = \mathbb{R} - \{-1, 3\}$

$\nexists f(-1)$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \infty$$

$f(0) = 1$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$\nexists f(3)$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-3)(x+1)}{x-3} = 4$$

Continua en $\mathbb{R} - \{-1, 3\}$ $x = -1$, d. a. $x = 3$, d. e.

40 Estudia la continuidad de la función: $f(x) = \frac{1}{2^{2-x}}$

Clasifica sus discontinuidades.

$$\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) &= 2^{1/0^+} = 2^{+\infty} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) &= 2^{1/0^-} = 2^{-\infty} = 0 \end{aligned} \right\} \nexists \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

en $x = 2$, d. a.

41 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

Determina a para que la función sea continua en todo su dominio.

$$f(1) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 1) = 2 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (ax + 3) = a + 3$$

$$\text{Igualando los límites laterales: } 2 = a + 3 \Rightarrow a = -1$$

42 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x+b}{x-1} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{4}{x-2} & \text{si } 0 < x < 1 \\ \frac{x^2+1}{ax} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

Determina a y b para la función sea continua en todo su dominio.

$$f(0) = -b$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{3x+b}{x-1} \right) = -b \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{x-2} \right) = -2$$

$$\text{Igualando los límites laterales: } -b = -2 \Rightarrow b = 2$$

$$f(1) = \frac{2}{a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{4}{x-2} \right) = -4 \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{x^2+1}{ax} \right) = \frac{2}{a}$$

$$\text{Igualando los límites laterales: } -4 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Ejercicios de aplicación

43 En los seis primeros meses, desde que abrió, una librería ha ido anotando el número de compradores de cada mes. Este número $N(x)$ se puede ajustar por la función

$$N(x) = \frac{1000x - 600}{x}$$

Siendo x el número del mes contado desde que abrió.

a) ¿Cuántos compradores tuvo en el segundo mes? ¿En qué mes contado desde la apertura tuvo 900 compradores?

b) Supongamos que esta fórmula sirve para predecir el número de compradores en el futuro, ¿podemos asegurar que este número siempre irá creciendo? Explica razonadamente tu respuesta.

$$a) N(2) = \frac{1000 \cdot 2 - 600}{2} = 700 \text{ compradores}$$

$$900 = \frac{1000x - 600}{x} \Rightarrow x = 6. \text{ En el sexto mes hay 900 compradores.}$$

$$b) \text{ Si calculamos } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1000x - 600}{x} = 1000$$

Como máximo, tendremos 1000 visitantes.

44 Tras un estudio demográfico se ha determinado que el número de habitantes de cierta población en los próximos años, vendrá dado por la función:

$$N(x) = \frac{14750x + 3750}{2x + 1}$$

a) ¿Cuál es la población actualmente? (año $x = 0$)

b) ¿Cuál será la población dentro de dos años?

c) ¿Y dentro de tres años?

d) Si se supone que el comportamiento de la población es siempre el mismo, ¿la población crecería indefinidamente o, por el contrario, se estabilizaría? Y si así fuera, ¿en qué valor?

a) 3750 habitantes

b) 6650 habitantes

c) 6857 habitantes

d) Se estabilizará en el valor 7375 habitantes.

45 En un cuadrado de lado 1, se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, del cual se unen los puntos medios de los lados y se forma otro cuadrado, y así sucesivamente. Calcula la suma de las áreas de todos los cuadrados así formados.

Las áreas forman una progresión geométrica decreciente, de primer término, 1 y de razón, 1/2.

$$\text{Por tanto } s = 1/1 - 1/2 = 2$$

46 Representa gráficamente funciones que cumplan las siguientes condiciones.

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{2\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

$$f(0) = 0, f(x) < 0 \text{ si } x < 0, f(x) > 0 \text{ si } x > 0$$

b) $\text{Dom } f = \mathbb{R}$, $\text{Rec } f = [-1, 0) \cup \{2\}$,

$$f(1) = -1, \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -1,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

c) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

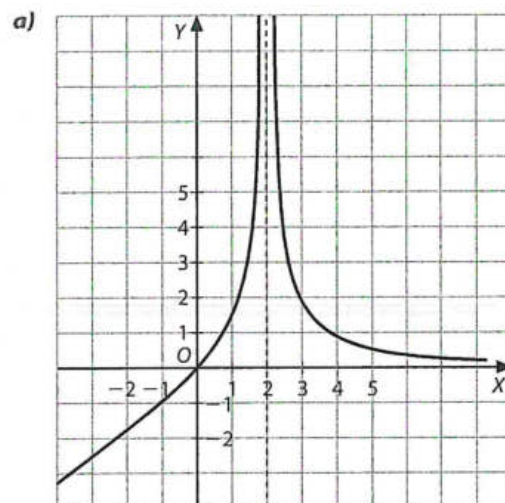
d) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-2, 3\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

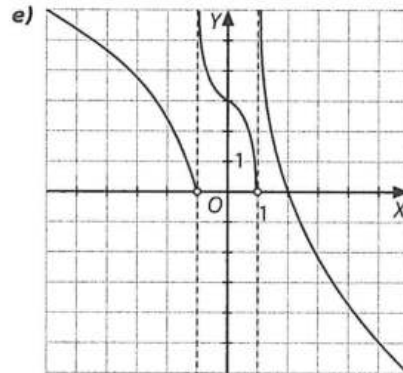
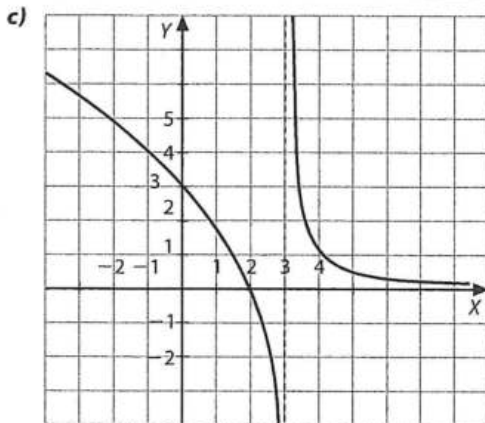
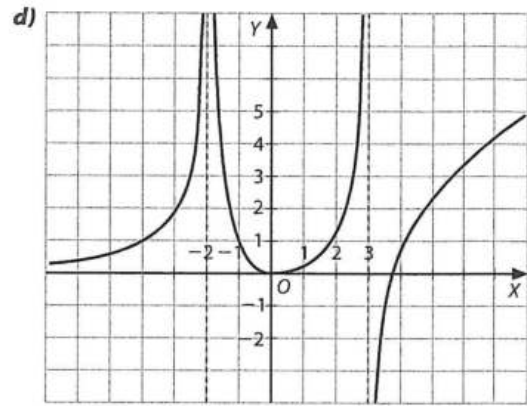
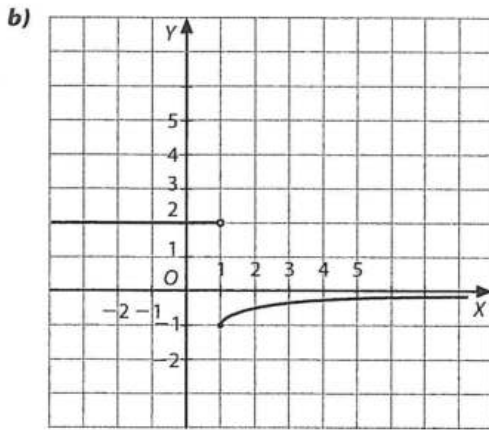
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = \infty$$

e) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$, $\text{Rec } f = \mathbb{R}$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$





Evaluación (página 279)

1. Calcula los términos generales y la suma de los 15 primeros términos de las siguientes progresiones aritméticas.

a) 1, 4, 7, 10, ...

b) -8, -6, -4, -2, ...

c) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \dots$

d) $-\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, -1, -\frac{2}{3}, \dots$

a) $a_n = 3n - 2$ $S_{15} = \frac{a_1 + a_{15}}{2} \cdot 15 = \frac{1 + 43}{2} \cdot 15 = 330$

c) $c_n = \frac{1}{2}n$ $S_{15} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{15}{2}}{2} \cdot 15 = 60$

b) $b_n = 2n - 10$ $S_{15} = \frac{-8 + 20}{2} \cdot 15 = 90$

d) $d_n = \frac{1}{3}n - 2$ $S_{15} = \frac{\frac{-5}{3} + 3}{2} \cdot 15 = 10$

2. Calcula los términos generales y la suma de los 5 primeros términos en cada caso. Si se puede, calcula también la suma de todos los términos de la progresión geométrica.

a) 1, 2, 4, 8, ...

b) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots$

c) $-\frac{1}{3}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{27}, -\frac{1}{81}, \dots$

d) 1, 5, 25, 125, ...

a) $a_n = 2^{n-1}$ $S_5 = \frac{a_1 \cdot (r^5 - 1)}{r - 1} = \frac{1 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 31$

b) $b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ $S_5 = \frac{1 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = 1,9375$

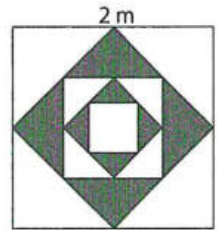
$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

c) $c_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ $S_5 = \frac{-\frac{1}{3} \cdot \left(\left(\frac{1}{3}\right)^5 - 1\right)}{\frac{1}{3} - 1} = -0,4979$

$$S = \frac{-\frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{2}$$

d) $d_n = 5^{n-1}$ $S_5 = \frac{1 \cdot (5^5 - 1)}{5 - 1} = 781$

3. Los cuadrados de esta figura se han obtenido uniendo 2 a 2 los puntos medios de los lados consecutivos. Calcula:



- a) El término general de la sucesión que forman los lados.
 b) El término general de la sucesión que forman las áreas.
 c) La suma de las áreas de los infinitos cuadrados que se generan.

a) La sucesión es una progresión geométrica de razón $\sqrt{2}/2$. El término general es: $a_n = 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

b) $b_n = (a_n)^2 = 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

c) $S = \frac{4}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{4}{\frac{1}{2}} = 8$

4. Mediante la definición del número e elabora una tabla con el desarrollo de la sucesión, utilizando una hoja de cálculo.

Construimos la tabla de la siguiente forma:

- En una fila horizontal añadimos los términos de la sucesión y en la siguiente fila, se introduce el valor de la sucesión haciendo referencia a la celda superior.
- Se arrastra hacia la derecha ambas filas para generar tantos términos como se quiera de la sucesión.
- A medida que crece el término, nos aproximamos al valor del número e.

5. Resuelve estos límites.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 3} - \sqrt{x^4 + 5x^2})$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x)$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x - \sqrt{x^4 + 6})$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^4 - 3} - \sqrt{x^4 + 5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^4 - 3} - \sqrt{x^4 + 5x^2}) \frac{\sqrt{x^4 - 3} + \sqrt{x^4 + 5x^2}}{\sqrt{x^4 - 3} + \sqrt{x^4 + 5x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-5x^2 - 3}{\sqrt{x^4 - 3} + \sqrt{x^4 + 5x^2}} = \frac{-5}{2}$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x} - x) \frac{\sqrt{x^2 - 3x} + x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2 - 3x} + x} = \frac{-3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3x - \sqrt{x^4 + 6} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 3x - \sqrt{x^4 + 6}) \frac{x^2 - 3x + \sqrt{x^4 + 6}}{x^2 - 3x + \sqrt{x^4 + 6}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9x^2 - 6x^3 - 6}{x^2 - 3x + \sqrt{x^4 + 6}} = -\infty$

6. Calcula los siguientes límites.

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right)$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \left(\frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} \right)$

a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2) \cdot (x-3)}{(x-2) \cdot (x+2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-3)}{(x+2)} = \frac{-1}{4}$

b) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = \left(\frac{20}{0} \right) = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4} = -\infty \end{cases}$

7. Estudia la continuidad de estas funciones y clasifica sus puntos de discontinuidad.

a) $f(x) = \frac{x-1}{x^2+5}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x < 3 \\ x+1 & \text{si } x \geq 3 \end{cases}$

d) $f(x) = \frac{x^2-4}{x-4}$

- a) La función es racional, por lo que es continua en todo su dominio. En este caso, como el denominador no se anula nunca, la función no tiene puntos conflictivos. Así pues, la función es continua $\forall x \in \mathbb{R}$.
- b) Esta función es racional, continua en todo su dominio. En este caso, la función es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$. La función tiene una discontinuidad asintótica en dicho punto ya que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$.
- c) La función está definida a trozos siendo cada uno un polinomio, así que, habría que estudiar en la continuidad en los puntos de unión. En este caso, la función tiene una discontinuidad de salto finito para $x = 3$. Por tanto, es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{3\}$.
- d) La función es racional cuyo dominio son todos los números reales excepto el cuatro. En este caso, para $x = 4$ la función tiene una discontinuidad asintótica ya que $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = \infty$. Así pues, $f(x)$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{4\}$.

8. Determina las asíntotas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2}$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x^2-3x}{x^2-9}$

- a) ■ La recta $x = 0$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty$. ■ La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.
- b) ■ La recta $x = 1$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$. ■ No tiene una asíntota horizontal ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$.
- La recta $y = x + 1$ es una asíntota oblicua ya que $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \infty$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{f(x)}{x} \right) = 1 \neq 0$ $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) - x) = 1 \in \mathbb{R}$
- c) ■ La recta $x = -3$ es una asíntota vertical ya que $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$. ■ La recta $y = 1$ es una asíntota horizontal ya que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1$.