9 Derivadas

EJERCICIOS PROPUESTOS

1 y 2. Ejercicios resueltos.

3. Para la función $f(x) = \sqrt{x+4}$, calcula su tasa de variación media en los intervalos [0; 1], [0; 0,1] y [0; 0,01]. ¿Puedes dar una estimación de su tasa de variación instantánea en el punto x = 0?

$$TVM\, f[0;\, 1] = \frac{\sqrt{5}-2}{1-0} \simeq 0,236068 \qquad TVM\, f[0;\, 0,1] = \frac{\sqrt{4,1}-2}{0,1-0} \simeq 0,248457 \qquad TVM\, f[0;\, 0,01] = \frac{\sqrt{4,01}-2}{0,01-0} \simeq 0,249844$$

Parece que la tasa de variación instantánea en $x = 0$ será 0,25.

4. Obtén la ecuación de la recta tangente a las siguientes curvas en los puntos indicados y representa gráficamente las funciones y las rectas obtenidas. ¿Responden las rectas obtenidas a la idea intuitiva de tangente?

a) $f(x) = x^3$, en $P(1, 1)$

b) $f(x) = x^2 + 5x - 2$, en $x = -2$

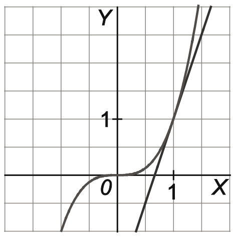
c) $f(x) = \sqrt{x+2}$, en $x = 2$

d) $f(x) = \frac{1}{x}$, en $x = 2$

a) La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^3-1}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^3+3h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(h^2+3h+3) = 3$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 1 = 3(x-1) \Rightarrow y = 3x - 2$

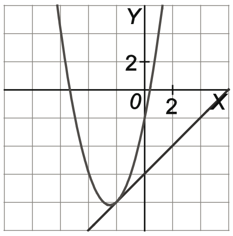


b) La pendiente de la recta tangente es:

$$m = f'(-2) = \lim_{h\to 0} \frac{f(-2+h)-f(-2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(-2+h)^2+5(-2+h)-2+8}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2+h}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}(h+1) = 1$$

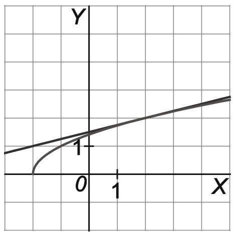
Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y + 8 = x + 2 \Rightarrow y = x - 6$



c) La pendiente de la recta tangente es:

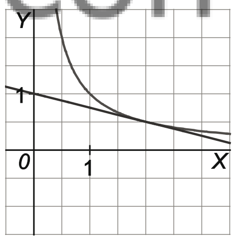
$$m = f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\left(\sqrt{4+h}-2\right)\left(\sqrt{4+h}+2\right)}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{h}{h\left(\sqrt{4+h}+2\right)} = \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt{4+h}+2} = \frac{1}{4}$$



Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y - 2 = \frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$

d) La pendiente de la recta tangente es:



$$m = f'(2) = \lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{2+h}-\frac{1}{2}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-h}{2h(2+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{-1}{2(2+h)} = -\frac{1}{4}$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es: $y-\frac{1}{2} = -\frac{1}{4}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{4}x+1$

En todos los casos las rectas obtenidas responden a la idea de recta tangente a una curva.

5. Sea f una función derivable en 2 tal que $f(2)=3$ y $f'(2)=-5$. ¿Es $y=-5x+3$ la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa $x=2$?

No, la tangente en el punto de abscisa $x=2$ es $y-f(2)=f'(2)(x-2) \Rightarrow y-3=-5(x-2) \Rightarrow y=-5x+13$.

6. Sea la tabla de valores de una función *f*.

x	1	1,97	2	2,02	2,2	3,99	4	4,01
$f(x)$	2,5	6,905	7	7,059	7,5	8,98	9	9,2

a) Utiliza esta tabla para aproximar $f'(2)$.

b) A la vista de los valores de la tabla, ¿crees que exista $f'(4)$? Justifica tu respuesta.

a) Tomamos los distintos valores de h para los que conocemos $f(2+h)$, con h pequeño, tenemos:

$$h=-0{,}03 \Rightarrow \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{f(1{,}97)-f(2)}{-0{,}03} = \frac{6{,}905-7}{-0{,}03} = 3{,}1\widehat{6} \simeq 3$$

$$h=0{,}02 \Rightarrow \frac{f(2+h)-f(2)}{h} = \frac{f(2{,}02)-f(2)}{0{,}02} = \frac{7{,}059-7}{0{,}02} = 2{,}95 \simeq 3$$

Por tanto, $f'(2) \simeq 3$.

b) Tomamos los distintos valores de h para los que conocemos $f(4+h)$, con h pequeño, tenemos:

$$h=-0{,}01 \Rightarrow \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{f(3{,}99)-f(4)}{-0{,}01} = \frac{8{,}98-9}{-0{,}01} = 2$$

$$h=0{,}01 \Rightarrow \frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \frac{f(4{,}01)-f(4)}{0{,}01} = \frac{9{,}2-9}{0{,}01} = 20$$

Por tanto, $f'(4)$ parece no existir.

7. El espacio en metros recorrido por un móvil está dado por:

$$\mathbf{f(t) = 50 - \frac{1}{t+5}}\text{, con } t \text{ en segundos.}$$

a) ¿Cuánto espacio ha recorrido en el instante $t=10$ s?

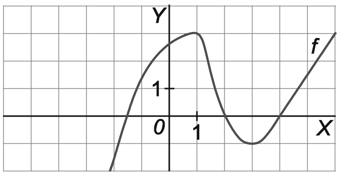
b) ¿Cuál es la velocidad del objeto en ese mismo instante?

a) Ha recorrido $f(10) = 50-\frac{1}{15} \approx 49{,}93$ m.

b) La velocidad viene dada por el valor de la derivada:

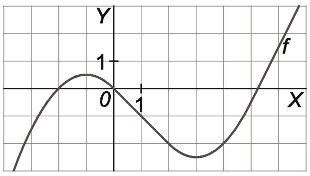
$$f'(10) = \lim_{h\to 0}\frac{f(10+h)-f(10)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{15}-\frac{1}{h+15}}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{15h(h+15)} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{15(h+15)} = \frac{1}{225}\text{ m/s}.$$

8. Observa la gráfica de $y = f(x)$ y calcula, aproximadamente $f'(-1)$, $f'(1)$, $f'(2)$, $f'(3)$ y $f'(5)$.



$f'(-1) \simeq \frac{3}{2}$ $f'(1) = 0$ $f'(2) \simeq -2$ $f'(3) = 0$ $f'(5) \simeq \frac{3}{2}$

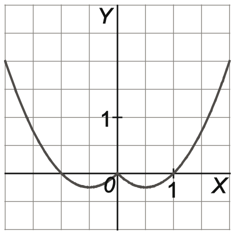
9. Dibuja la gráfica de una función $y = f(x)$ para la que: $f'(-2) = 1$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) = -1$, $f'(3) = 0$ y $f'(5) = 2$.



Respuesta abierta, por ejemplo la de la imagen.

10. Dibuja la gráfica de $f(x) = x^2 - |x|$. ¿Crees que tiene tangente en el origen? Intenta obtener $f'(0)$.

Observando la gráfica se observa que no tiene tangente en el origen, ya que en este punto tiene "un pico". Más formalmente, si se intenta calcular $f'(0)$, que sería la tangente de la recta tangente en el origen, se obtiene:



$f'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h}$, que depende del signo de h, ya que:

$\lim_{h \to 0^-} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + h}{h} = \lim_{h \to 0^-} h + 1 = 1$ y $\lim_{h \to 0^+} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{h^2 - h}{h} = \lim_{h \to 0^+} h - 1 = -1$

Por tanto, $f'(0)$ no existe y no existe la tangente en el origen.

11. Ejercicio interactivo.

12. Ejercicio resuelto.

13. Se considera la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \le 1 \\ -x + 3 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

a) ¿Es f continua en $x = 1$? **b)** Comprueba que no existe $f'(1)$. **c)** ¿Existe recta tangente en $P(1, f(1))$?

a) Calculemos los límites laterales en $x = 1$: $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \left(x^2 + 1\right) = 2$ y $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x + 3) = 2$

Por tanto, $\lim_{x \to 1} f(x) = 2 = f(1)$, es decir, la función es continua en $x = 1$.

b) Calculemos las derivadas laterales en $x = 1$:

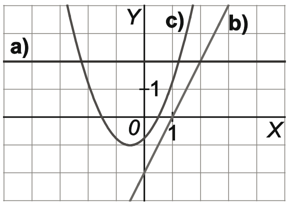
$$f'(1^-) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h^2 + 2h}{h} = \lim_{h \to 0^-} (h + 2) = 2$$

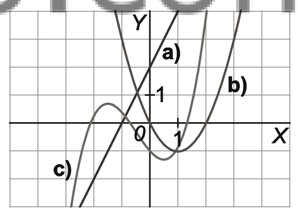
$$f'(1^+) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-(1+h) + 3 - 2}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-h}{h} = -1$$

Como las derivadas laterales no coinciden, la función no es derivable en $x = 1$.

c) Puesto que no existe $f'(1)$, no hay tangente en $P(1, f(1))$.

14. Observa las tres funciones representadas en la figura y, en cada caso, esboza la gráfica de $y = f'(x)$ a partir de la de $y = f(x)$.





15. Ejercicio resuelto.

16. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \sqrt{3}$

b) $f(x) = x^4 - 3x$

c) $f(x) = (x^2 + 1)^2$

d) $f(x) = 5x^4 + 2x^3 + 7x^2$

e) $f(x) = \dfrac{2x^3}{3} - \dfrac{3x^2}{2} + \dfrac{5x}{4} - \dfrac{1}{6}$

f) $f(x) = (3x^3 - 2x^2 - x + 1)^2$

a) $f'(x) = 0$

b) $f'(x) = 4x^3 - 3$

c) $f'(x) = 2(x^2 + 1)2x = 4x^3 + 4x$

d) $f'(x) = 20x^3 + 6x^2 + 14x$

e) $f'(x) = 2x^2 - 3x + \dfrac{5}{4}$

f) $f'(x) = 2(3x^3 - 2x^2 - x + 1)(9x^2 - 4x - 1) = 54x^5 - 60x^4 - 8x^3 + 30x^2 - 6x - 2$

17. Si $f'(0) = 2$, $g'(0) = -1$, $f(0) = 7$ y $g(0) = 3$, calcula la pendiente de la tangente en el punto $x = 0$ de:

a) $s(x) = 2f(x) - 3g(x)$

b) $p(x) = \left(f(x) + x\right)^2$

a) $s'(x) = 2f'(x) - 3g'(x) \Rightarrow m = s'(0) = 2f'(0) - 3g'(0) = 7$

b) $p'(x) = 2\left(f(x) + x\right)\left(f'(x) + 1\right) \Rightarrow m = p'(0) = 2\left(f(0) + 0\right)\left(f'(0) + 1\right) = 42$

18. Calcula las derivadas de orden siete y ocho de:

$$f(x) = x^7 - 384x^6 + 1115x^5 - 20x^4 + 701x^3 + 3x - 4321$$

$f^{vii}(x) = 7! = 5040$ y $f^{viii}(x) = 0$

En general, la derivada de orden *n* de una función polinómica de grado *n* es igual a *n*!, y las derivadas superiores son iguales a 0.

19. Ejercicio resuelto.

20. Calcula la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = (2x-7)(5-3x)$ **c)** $f(x) = (x^4+3x^2)(2-6x-x^2)$ **e)** $f(x) = \sqrt{2x^3-x^2+5x-3}$

b) $f(x) = (x^3-x)^2(3x^2-1)$ **d)** $f(x) = x^2(x+3)(5x^2-x)$ **f)** $f(x) = (x^4+8)^2\sqrt{x-1}$

a) $f'(x) = 2(5-3x)+(2x-7)(-3) = -12x+31$

b) $f'(x) = 2(x^3-x)(3x^2-1)(3x^2-1)+(x^3-x)^2 6x = 24x^7-42x^5+20x^3-2x$

c) $f'(x) = (4x^3+6x)(2-6x-x^2)+(x^4+3x^2)(-6-2x) = -6x^5-30x^4-4x^3-54x^2+12x$

d) $f'(x) = 2x(x+3)(5x^2-x)+x^2(5x^2-x)+x^2(x+3)(10x-1) = 25x^4+56x^3-9x^2$

e) $f'(x) = \dfrac{6x^2-2x+5}{2\sqrt{2x^3-x^2+5x-3}}$

f) $f'(x) = 2(x^4+8)(4x^3)\sqrt{x-1}+(x^4+8)^2\dfrac{1}{2\sqrt{x-1}} = \dfrac{4(x^4+8)(4x^3)(x-1)+(x^4+8)^2}{2\sqrt{x-1}} =$

$= \dfrac{17x^8-16x^7+144x^4-128x^3+64}{2\sqrt{x-1}}$

21. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-3}$ **c)** $f(x) = \left(\dfrac{1}{x-3}\right)^2$ **e)** $f(x) = \dfrac{x^3-x+3}{x^2+2x-1}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+5}$ **d)** $f(x) = \dfrac{x^3-x}{x^2+1}$ **f)** $f(x) = \dfrac{x-2}{x-1}\sqrt{x}$

a) $f'(x) = \dfrac{0\cdot(x-3)-1\cdot 1}{(x-3)^2} = -\dfrac{1}{(x-3)^2}$

b) $f'(x) = \dfrac{(x^2+5)-x\cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \dfrac{-x^2+5}{(x^2+5)^2}$

c) $f'(x) = 2\left(\dfrac{1}{x-3}\right)\left(-\dfrac{1}{(x-3)^2}\right) = -\dfrac{2}{(x-3)^3}$

d) $f'(x) = \dfrac{(3x^2-1)(x^2+1)-(x^3-x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{x^4+4x^2-1}{(x^2+1)^2}$

e) $f'(x) = \dfrac{(3x^2-1)(x^2+2x-1)-(x^3-x+3)(2x+2)}{(x^2+2x-1)^2} = \dfrac{x^4+4x^3-2x^2-6x-5}{(x^2+2x-1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{(x-1)-(x-2)}{(x-1)^2}\sqrt{x}+\dfrac{x-2}{x-1}\dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{\sqrt{x}}{(x-1)^2}+\dfrac{x-2}{2\sqrt{x}(x-1)} = \dfrac{2x+(x-1)(x-2)}{2\sqrt{x}(x-1)^2} = \dfrac{x^2-x+2}{2\sqrt{x}(x-1)^2}$

22. Dada $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$, calcula $f'(x)$ y $f''(x)$.

$f'(x) = \dfrac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{4x}{(x^2+1)^2}$

$f''(x) = \dfrac{4(x^2+1)^2-4x\cdot 2(x^2+1)\cdot 2x}{(x^2+1)^4} = \dfrac{4(x^2+1)-4x\cdot 2\cdot 2x}{(x^2+1)^3} = \dfrac{4(-3x^2+1)}{(x^2+1)^3}$

23 y 24. Ejercicios resueltos.

25. Copia y completa la siguiente tabla.

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(f\circ g)'(x)$
0	1	1	2	5		
1	4	3	0	1		
2	–1	2	–1	3		
3	2	0	4	2		

Aplicando la regla de la cadena tenemos $(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$, por tanto:

$(f\circ g)(0)=f(g(0))=f(1)=4$ y $(f\circ g)'(0)=f'(g(0))\,g'(0)=f'(1)\,g'(0)=0\cdot 5=0$

$(f\circ g)(1)=f(g(1))=f(3)=2$ y $(f\circ g)'(1)=f'(g(1))\,g'(1)=f'(3)\,g'(1)=4\cdot 1=4$

$(f\circ g)(2)=f(g(2))=f(2)=-1$ y $(f\circ g)'(2)=f'(g(2))\,g'(2)=f'(2)\,g'(2)=-1\cdot 3=-3$

$(f\circ g)(3)=f(g(3))=f(0)=1$ y $(f\circ g)'(3)=f'(g(3))\,g'(3)=f'(0)\,g'(3)=2\cdot 2=4$

De este modo, la tabla completa quedaría:

x	$f(x)$	$g(x)$	$f'(x)$	$g'(x)$	$(f\circ g)(x)$	$(f\circ g)'(x)$
0	1	1	2	5	4	0
1	4	3	0	1	2	4
2	–1	2	–1	3	–1	–3
3	2	0	4	2	1	4

26. Sean $f(x)=x^2+x$ y $g(x)=2x+7$, calcula $(f\circ g)'(-1)$ y $(g\circ f)'(-1)$.

$f'(x)=2x+1$ y $g'(x)=2$, por tanto:

$(f\circ g)'(-1)=f'(g(-1))g'(-1)=f'(5)g'(-1)=22$ y $(g\circ f)'(-1)=g'(f(-1))\cdot f'(-1)=g'(0)\cdot f'(-1)=-2$

27. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x)=(x-1)^5$

b) $f(x)=(3x+2)^4$

c) $f(x)=(x^3-2x^2+x-3)^6$

d) $f(x)=\sqrt{x^3-2}$

e) $f(x)=\sqrt{2x^3+x^2}$

f) $f(x)=\sqrt{x^3-x}$

a) $f'(x)=5(x-1)^4\cdot 1=5(x-1)^4$

b) $f'(x)=4(3x+2)^3\cdot 3=12(3x+2)^3$

c) $f'(x)=6(x^3-2x^2+x-3)^5(3x^2-4x+1)$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3-2}}\cdot 3x^2=\dfrac{3x^2}{2\sqrt{x^3-2}}$

e) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{2x^3+x^2}}(6x^2+2x)=\dfrac{3x^2+x}{\sqrt{2x^3+x^2}}$

f) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x^3-x}}(3x^2-1)=\dfrac{3x^2-1}{2\sqrt{x^3-x}}$

28. Utilizando las reglas de derivación de operaciones y la regla de la cadena, halla las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=(2x^2-1)(x^3+4x-2)^4$ **b)** $f(x)=(x^2-1)\sqrt{5x-4}$ **c)** $f(x)=\left(\dfrac{3x-4}{x}\right)^2$

d) $f(x)=\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^3$

a) $f'(x)=4x\left(x^3+4x-2\right)^4+\left(2x^2-1\right)\cdot 4\left(x^3+4x-2\right)^3\left(3x^2+4\right)=4\left(x^3+4x-2\right)^3\left(7x^4+9x^2-2x-4\right)$

b) $f'(x)=2x\sqrt{5x-4}+\left(x^2-1\right)\dfrac{5}{2\sqrt{5x-4}}=\dfrac{4x(5x-4)+5\left(x^2-1\right)}{2\sqrt{5x-4}}=\dfrac{25x^2-16x-5}{2\sqrt{5x-4}}$

c) $f'(x)=2\left(\dfrac{3x-4}{x}\right)\left(\dfrac{3x-(3x-4)}{x^2}\right)=\dfrac{8(3x-4)}{x^3}$

d) $f'(x)=3\left(\dfrac{\sqrt{x}}{2x-1}\right)^2\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}}(2x-1)-\sqrt{x}\cdot 2}{(2x-1)^2}=\dfrac{3x}{(2x-1)^2}\cdot\dfrac{2x-1-4x}{2\sqrt{x}\,(2x-1)^2}=\dfrac{-3x(2x+1)}{2\sqrt{x}(2x-1)^4}$

29. Utilizando la regla de la cadena calcula las siguientes derivadas.

a) $f(x)=\sqrt{(3x-5)^5-1}$ **b)** $f(x)=\left(\sqrt{x^2-x}\right)^3$ **c)** $f(x)=\dfrac{(x^3+2x)^4-1}{(x^3+2x)^3}$ **d)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+x}-x}{(3x-1)^2}$

a) $f'(x)=\dfrac{5(3x-5)^4\cdot 3}{2\sqrt{(3x-5)^5-1}}=\dfrac{15\,(3x-5)^4}{2\sqrt{(3x-5)^5-1}}$

b) $f'(x)=3\left(\sqrt{x^2-x}\right)^2\cdot\dfrac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{3}{2}\left(\sqrt{x^2-x}\right)(2x-1)$

c) $f'(x)=\dfrac{\left[4\left(x^3+2x\right)^3\left(3x^2+2\right)\right]\left(x^3+2x\right)^3-\left[\left(x^3+2x\right)^4-1\right]\left[3\left(x^3+2x\right)^2\left(3x^2+2\right)\right]}{\left[\left(x^3+2x\right)^3\right]^2}=$

$=\dfrac{\left(x^3+2x\right)^2\left[4\left(x^3+2x\right)^4\left(3x^2+2\right)-3\left(\left(x^3+2x\right)^4-1\right)\left(3x^2+2\right)\right]}{\left(x^3+2x\right)^6}=$

$=\dfrac{4\left(x^3+2x\right)^4\left(3x^2+2\right)-3\left(x^3+2x\right)^4\left(3x^2+2\right)+3\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^4}=3x^2+2+\dfrac{3\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^4}$

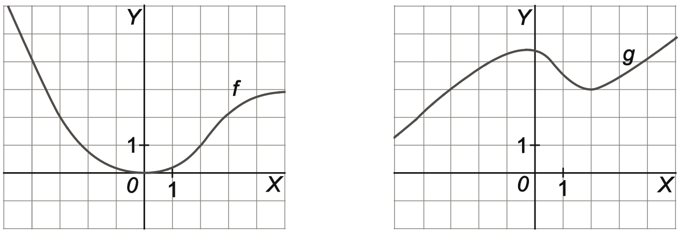
Otro modo:

$f(x)=\dfrac{(x^3+2x)^4-1}{(x^3+2x)^3}=x^3+2x-\dfrac{1}{(x^3+2x)^3}\Rightarrow f'(x)=3x^2+2-\dfrac{-3(x^3+2x)^2(3x^2+2)}{(x^3+2x)^6}=3x^2+2+\dfrac{3\left(3x^2+2\right)}{\left(x^3+2x\right)^4}$

d) $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}}-1\right)(3x-1)^2-\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\cdot 2\,(3x-1)\cdot 3}{(3x-1)^4}=$

$=\dfrac{(3x-1)\left[(2x+1)(3x-1)-2\sqrt{x^2+x}\,(3x-1)-12\left(x^2+x\right)+12x\sqrt{x^2+x}\right]}{2\sqrt{x^2+x}\,(3x-1)^4}=\dfrac{\left(-6x^2-11x-1\right)+(6x+2)\sqrt{x^2+x}}{2\sqrt{x^2+x}\;(3x-1)^3}$

30. Sean *f* y *g* las funciones dadas en las gráficas de la figura y sea $h(x) = (f \circ g)(x)$.



a) Calcula $h(-3)$ y $h(2)$.

b) Estima $f'(-3), f'(2), g'(-3), g'(2)$.

c) ¿Cuál es el signo de $h'(-3)$? Explica cómo lo obtienes.

d) Escribe la ecuación de la tangente a la curva $y = h(x)$ en $P(2, h(2))$.

a) $h(-3) = f(g(-3)) = f(3) = 2$ y $h(2) = f(g(2)) = f(3) = 2$

b) $f'(-3) = -\dfrac{3}{2}, f'(2) = 1, g'(-3) = 1$ y $g'(2) = 0$

c) $h'(-3) = f'(g(-3))g'(-3) = f'(3)g'(-3) = f''(3)$, que debe ser positivo, ya que la recta tangente a *f* en $x = 3$ es creciente y, por tanto, tiene pendiente positiva.

d) Como $h'(2) = f'(g(2))g'(2) = f'(3)g'(2) = 0$, la ecuación de la recta tangente es $y - h(2) = h'(2)(x-2) \Rightarrow y = 2$.

31. Ejercicio interactivo.

32 y 33. Ejercicios resueltos.

34. Comprueba, usando la derivada de la función inversa, que la derivada de $f(x) = \sqrt{x}$ es la que ya conoces.

Tomando $g(x) = x^2$ se tiene $f(x) = g^{-1}(x)$, luego: $f'(x) = \left(g^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{g'\left(g^{-1}(x)\right)} = \dfrac{1}{g'(f(x))} = \dfrac{1}{2f(x)} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

35. Calcula las derivadas de las inversas de las siguientes funciones en los puntos que se indican.

a) $f(x) = x^3 + x + 1$ en el punto $x = 11$.

b) $f(x) = x + \sqrt{x+5}$ en el punto $x = -3$.

a) Sea $g(x) = f^{-1}(x)$, tenemos $g'(11) = \dfrac{1}{f'(g(11))}$.

Para calcular $g(11)$ resolvamos la ecuación $f(x) = 11 \Rightarrow x^3 + x + 1 = 11 \Rightarrow x^3 + x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2$. Por otra parte, $f'(x) = 3x^2 + 1$, con lo que $g'(11) = \dfrac{1}{f'(2)} = \dfrac{1}{13}$.

b) Sea $g(x) = f^{-1}(x)$, tenemos $g'(-3) = \dfrac{1}{f'(g(-3))}$.

Para calcular $g(-3)$ resolvamos la ecuación $f(x) = -3 \Rightarrow x + \sqrt{x+5} = -3 \Rightarrow \sqrt{x+5} = -3 - x \Rightarrow$

$\Rightarrow x + 5 = 9 + x^2 + 6x \Rightarrow x^2 + 5x + 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ (Falsa), $x = -4$. Por otra parte, $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$, con lo que

$g'(-3) = \dfrac{1}{f'(-4)} = \dfrac{2}{3}$.

36. Halla, para el punto $x = 1$, el valor de de la derivada de la inversa de la función $f(x) = x - \sqrt{x+5}$.

Sea $g(x) = f^{-1}(x)$, tenemos $g'(1) = \dfrac{1}{f'(g(1))}$.

Para calcular $g(1)$ resolvamos la ecuación $f(x) = 1 \Rightarrow x - \sqrt{x+5} = 1 \Rightarrow x - 1 = \sqrt{x+5} \Rightarrow x^2 - 2x + 1 = x + 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = -1$ (Falsa), $x = 4$ .Por otra parte, $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x+5}}$, con lo que $g'(1) = \dfrac{1}{f'(4)} = \dfrac{6}{5}$.

37. Deduce la derivada de la función: $f(x) = 5 + \sqrt{3x-2}$.

Calcula la ecuación de la tangente a la curva en el punto de abscisa 34.

Consideremos la función $g(x) = \dfrac{(x-5)^2 + 2}{3}$ y observemos que $(g \circ f)(x) = x$ .Derivando esta expresión tenemos $g'(f(x))\,f'(x) = 1$, con lo que $f'(x) = \dfrac{1}{g'(f(x))}$ .Como $g'(x) = \dfrac{2(x-5)}{3}$, obtenemos $f'(x) = \dfrac{3}{2(f(x)-5)} = \dfrac{3}{2\sqrt{3x-2}}$.

La tangente pedida tiene ecuación $y - f(34) = f'(34)(x-34) \Rightarrow y - 15 = \dfrac{3}{20}(x-34) \Rightarrow y = \dfrac{3}{20}x + \dfrac{99}{10}$.

38. Ejercicio resuelto.

39. Obtén las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3}$ **c)** $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^2}$ **e)** $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x}$ **d)** $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x^3} - x^2 - 2x$ **f)** $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x^3}}$

a) $f(x) = \sqrt{x} - 4\sqrt{x^3} = x^{\frac{1}{2}} - 4x^{\frac{3}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4\cdot\dfrac{3}{2}x^{\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 6\sqrt{x}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{x} + 2\sqrt{x} = x^{\frac{1}{3}} + 2x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + 2\cdot\dfrac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[4]{x}}{x^2} = \dfrac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2} = x^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{7}{4}x^{-\frac{11}{4}} = -\dfrac{7}{4\sqrt[4]{x^{11}}} = -\dfrac{7}{4x^2\sqrt[4]{x^3}}$

d) $f(x) = 3\sqrt[5]{x} + \sqrt[4]{x^3} - x^2 - 2x = 3x^{\frac{1}{5}} + x^{\frac{3}{4}} - x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = \dfrac{3}{5}x^{-\frac{4}{5}} + \dfrac{3}{4}x^{-\frac{1}{4}} - 2x - 2 = \dfrac{3}{5\sqrt[5]{x^4}} + \dfrac{3}{4\sqrt[4]{x}} - 2x - 2$

e) $f(x) = \sqrt[4]{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + x + 1 = x^{\frac{1}{4}} - 3x^{\frac{2}{3}} + x + 1 \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} - 2x^{-\frac{1}{3}} + 1 = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}} - \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}} + 1$

f) $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt[5]{x^3}} = \dfrac{x}{x^{\frac{3}{5}}} = x^{\frac{2}{5}} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2}{5}x^{-\frac{3}{5}} = \dfrac{2}{5\sqrt[5]{x^3}}$

40. ¿Existe algún punto en la gráfica de $y = \sqrt[5]{x}$ en la que la tangente sea paralela a la recta $3x - y = 0$?

La pendiente de la recta dada es 3, por tanto, nos preguntamos si la ecuación $\left(\sqrt[5]{x}\right)' = 3$ tiene solución.

Derivando tenemos: $\left(\sqrt[5]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{5}}\right)' = \frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}} = \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} \Rightarrow \left(\sqrt[5]{x}\right)' = 3 \Rightarrow \frac{1}{5\sqrt[5]{x^4}} = 3 \Rightarrow 15\sqrt[5]{x^4} = 1 \Rightarrow 15^5 x^4 = 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^4 = \frac{1}{15^5}$, que tiene dos soluciones, $x = \sqrt[4]{\frac{1}{15^5}} = \frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$ y $x = -\sqrt[4]{\frac{1}{15^5}} = -\frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$.

Por tanto, sí existe algún punto en la gráfica de $y = \sqrt[5]{x}$, de hecho existen dos, en los que la tangente es paralela a la recta $3x - y = 0$. Estos dos puntos son los de abscisa $x = \frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$ o $x = -\frac{1}{15\sqrt[4]{15}}$.

41. Dada la función $f(x) = \sqrt[3]{6x-3}$:

a) Halla $f'(1)$, $f^{-1}(x)$ y su derivada $\left(f^{-1}\right)'(x)$.

b) Calcula $\left(f^{-1}\right)'(f(1))$ y compáralo con $f'(1)$. ¿Es el resultado que esperabas?

c) Obtén $f^{-1}(2)$.

a) $f(x) = \sqrt[3]{6x-3} = (6x-3)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(6x-3)^{-\frac{2}{3}} \cdot 6 = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x-3)^2}} \Rightarrow f'(1) = \frac{2}{\sqrt[3]{9}}$

$y = \sqrt[3]{6x-3} \Rightarrow y^3 = 6x-3 \Rightarrow x = \frac{y^3+3}{6} \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x^3+3}{6}$

$\left(f^{-1}\right)'(x) = \frac{3x^2}{6} = \frac{x^2}{2}$

b) $\left(f^{-1}\right)'(f(1)) = \left(f^{-1}\right)'\left(\sqrt[3]{3}\right) = \frac{\left(\sqrt[3]{3}\right)^2}{2} = \frac{\sqrt[3]{9}}{2} = \frac{1}{f'(1)}$ como tenía que ocurrir.

c) $f^{-1}(2) = \frac{2^3+3}{6} = \frac{11}{6}$

42 y 43. Ejercicios resueltos.

44. Halla la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \ln\left(x^3 - 2x + 1\right)$

b) $f(x) = \log_2\left(3x^2 - 1\right)$

c) $f(x) = \sqrt{x}\ln\left(7x^2\right)$

d) $f(x) = 5x\log_5 x^4$

e) $f(x) = x\ln x$

f) $f(x) = \sqrt{\ln x}$

a) $f'(x) = \frac{3x^2-2}{x^3-2x+1}$ con $x \in D(f)$

b) $f'(x) = \frac{6x}{\ln 2\left(3x^2-1\right)}$ con $x \in D\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$

c) $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\ln\left(7x^2\right) + \sqrt{x}\frac{14x}{7x^2} = \frac{\ln\left(7x^2\right)}{2\sqrt{x}} + \frac{2}{\sqrt{x}} = \frac{4+\ln\left(7x^2\right)}{2\sqrt{x}}$

d) $f'(x) = 5\log_5 x^4 + 5x\frac{4x^3}{\ln 5 \cdot x^4} = 5\log_5 x^4 + \frac{20}{\ln 5}$

e) $f'(x) = \ln x + x\frac{1}{x} = 1 + \ln x$

f) $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}$

45. Deriva estas funciones usando derivación logarítmica.

a) $f(x) = x^x$

b) $f(x) = x^{\ln x}$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}}$

d) $f(x) = x^{2x+1}$

e) $f(x) = x^{x^2}$

f) $f(x) = x^{\sqrt{x}}$

a) $f(x) = x^x \Rightarrow \ln f(x) = x\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \ln x + 1 \Rightarrow f'(x) = f(x)(\ln x + 1) = x^x(\ln x + 1)$

b) $f(x) = x^{\ln x} \Rightarrow \ln f(x) = (\ln x)^2 \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{2\ln x}{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{2\ln x \cdot f(x)}{x} = \dfrac{2\ln x \cdot x^{\ln x}}{x} = 2\ln x \cdot x^{\ln x - 1}$

c) $f(x) = \left(\sqrt{x}\right)^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \sqrt{x}\,\ln\sqrt{x} = \dfrac{\sqrt{x}}{2}\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\ln x}{4\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{2x} = \dfrac{\ln x}{4\sqrt{x}} + \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = \dfrac{2 + \ln x}{4\sqrt{x}} \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \dfrac{2 + \ln x}{4\sqrt{x}} = \sqrt{x}^{\sqrt{x}} \cdot \dfrac{2 + \ln x}{4\sqrt{x}} = \dfrac{(2 + \ln x)\sqrt{x}^{\sqrt{x} - 1}}{4}$

d) $f(x) = x^{2x+1} \Rightarrow \ln f(x) = (2x+1)\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2\ln x + \dfrac{2x+1}{x} \Rightarrow f'(x) = f(x)\left(2\ln x + \dfrac{2x+1}{x}\right) = \left(2\ln x + \dfrac{2x+1}{x}\right)x^{2x+1}$

e) $f(x) = x^{x^2} \Rightarrow \ln f(x) = x^2\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = 2x\ln x + \dfrac{x^2}{x} = 2x\ln x + x = x(2\ln x + 1) \Rightarrow f'(x) = x(2\ln x + 1)f(x) =$

$= x(2\ln x + 1)x^{x^2} = (2\ln x + 1)x^{x^2 + 1}$

f) $f(x) = x^{\sqrt{x}} \Rightarrow \ln f(x) = \sqrt{x}\ln x \Rightarrow \dfrac{f'(x)}{f(x)} = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{x}}{x} = \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} = \dfrac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(x) = f(x) \cdot \dfrac{2 + \ln x}{2\sqrt{x}} = \dfrac{x^{\sqrt{x}}(2 + \ln x)}{2\sqrt{x}}$

46 y 47. Ejercicios resueltos.

48. Obtén la derivada de estas funciones.

a) $f(x) = e^{3x^3 - 5x + 1}$

b) $f(x) = e^x\left(x^2 - 7x - 3\right)$

c) $f(x) = \dfrac{e^{x^3} + x^3}{x}$

d) $f(x) = \sqrt{x}e^x$

a) $f'(x) = e^{3x^3 - 5x + 1}\left(9x^2 - 5\right)$

b) $f'(x) = e^x\left(x^2 - 7x - 3\right) + e^x(2x - 7) = e^x\left(x^2 - 5x - 10\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{\left(e^{x^3}3x^2 + 3x^2\right)x - \left(e^{x^3} + x^3\right)}{x^2} = \dfrac{e^{x^3}\left(3x^3 - 1\right) + 2x^3}{x^2}$

d) $f'(x) = \dfrac{e^x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}e^x = e^x\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x}\right) = \dfrac{e^x(1 + 2x)}{2\sqrt{x}}$

49. Para las siguientes funciones, calcula para qué valores de *x* se anula, en cada caso, su derivada.

a) $f(x)=e^{x^2-6x}$ **b)** $f(x)=e^{-x^2+5x-6}$ **c)** $f(x)=e^{x^3-x}$ **d)** $f(x)=e^{\sqrt{x^2-4}}$

a) $f'(x)=e^{x^2-6x}(2x-6)$, por tanto, $f'(x)=0\Rightarrow 2x-6=0\Rightarrow x=3$

b) $f'(x)=e^{-x^2+5x-6}(-2x+5)$, por tanto, $f'(x)=0\Rightarrow -2x+5=0\Rightarrow x=\dfrac{5}{2}$

c) $f'(x)=e^{x^3-x}\left(3x^2-1\right)$, por tanto, $f'(x)=0\Rightarrow 3x^2-1=0\Rightarrow x^2=\dfrac{1}{3}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ x=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\end{cases}$

d) $f'(x)=e^{\sqrt{x^2-4}}\left(\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}\right)=\dfrac{xe^{\sqrt{x^2-4}}}{\sqrt{x^2-4}}$, por tanto, $f'(x)=0\Rightarrow x=0$ y como $D(f)=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, la derivada no sea nula para ningún valor del $D(f)$.

50. Deriva las funciones siguientes.

a) $f(x)=7^{2x}$ **d)** $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{x}$ **g)** $f(x)=e^{7x}\sqrt{x}$ **j)** $f(x)=e^x\ln x$

b) $f(x)=2^{\sqrt{x}}$ **e)** $f(x)=3^{x^3-x}$ **h)** $f(x)=\dfrac{2^x-x}{3^x}$ **k)** $f(x)=\ln\left(\sqrt{e^x}\right)$

c) $f(x)=9^{\sqrt[3]{x}+1}$ **f)** $f(x)=x-8^{-x^4}$ **i)** $f(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{e^x}$ **l)** $f(x)=\dfrac{xe^x}{\ln x}$

a) $f'(x)=7^{2x}\ln 7\cdot 2=2\ln 7\cdot 7^{2x}$

b) $f'(x)=2^{\sqrt{x}}\ln 2\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{2^{\sqrt{x}}\ln 2}{2\sqrt{x}}$

c) $f'(x)=9^{\sqrt[3]{x}+1}\ln 9\cdot\dfrac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{9^{\sqrt[3]{x}+1}\ln 9}{3\sqrt[3]{x^2}}$

d) $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}\cdot x-e^{-x}}{x^2}=\dfrac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}$

e) $f'(x)=3^{x^3-x}\ln 3\cdot\left(3x^2-1\right)$

f) $f'(x)=1-8^{-x^4}\ln 8\cdot\left(-4x^3\right)=1+4\ln 8\cdot x^3\cdot 8^{-x^4}$

g) $f'(x)=7e^{7x}\sqrt{x}+e^{7x}\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{(14x+1)e^{7x}}{2\sqrt{x}}$

h) $f'(x)=\dfrac{\left(2^x\ln 2-1\right)3^x-\left(2^x-x\right)3^x\cdot\ln 3}{3^{2x}}=\dfrac{3^x\left[2^x(\ln 2-\ln 3)-1+\ln 3\cdot x\right]}{3^{2x}}=\dfrac{2^x(\ln 2-\ln 3)-1+\ln 3\cdot x}{3^x}$

i) $f'(x)=\left(\sqrt{2}\right)^{e^x}\ln\sqrt{2}\cdot e^x=\ln\sqrt{2}\cdot e^x\cdot\left(\sqrt{2}\right)^{e^x}$

j) $f'(x)=e^x\ln x+e^x\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{e^x(x\ln x+1)}{x}$

k) $f(x)=\ln\left(\sqrt{e^x}\right)=\ln e^{\frac{x}{2}}=\dfrac{x}{2}\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2}$

l) $f'(x)=\dfrac{\left(e^x+xe^x\right)\ln x-xe^x\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2}=\dfrac{e^x\left[(1+x)\ln x-1\right]}{(\ln x)^2}$

51 y 52. Ejercicios resueltos.

53. Obtén la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\text{sen}\left(x^2+e^{2x}\right)$ **c)** $f(x)=\text{sen}\left(5x^2-2x+1\right)$ **e)** $f(x)=x\cos(3x-2)$

b) $f(x)=\sqrt{\cos x}$ **d)** $f(x)=\text{tg}^2(2x)$ **f)** $f(x)=\dfrac{x+\text{sen}\,x}{\cos(4x)}$

a) $f'(x)=\left(2x+2e^{2x}\right)\cos\left(x^2+e^{2x}\right)$

b) $f'(x)=\dfrac{-\text{sen}\,x}{2\sqrt{\cos x}}$

c) $f'(x)=(10x-2)\cos\left(5x^2-2x+1\right)$

d) $f'(x)=2\,\text{tg}(2x)\cdot\dfrac{2}{\cos^2(2x)}=\dfrac{4\,\text{sen}(2x)}{\cos^3(2x)}$

e) $f'(x)=\cos(3x-2)+x(-\text{sen}(3x-2))\cdot 3=\cos(3x-2)-3x\,\text{sen}(3x-2)$

f) $f'(x)=\dfrac{(1+\cos x)\cos(4x)-(x+\text{sen}\,x)(-\text{sen}(4x))\cdot 4}{\cos^2(4x)}=\dfrac{(1+\cos x)\cos(4x)+4(x+\text{sen}\,x)\text{sen}(4x)}{\cos^2(4x)}$

54. Halla la recta tangente a la curva $f(x)=\text{sen}\,x$ en el origen.

$f'(x)=\cos x$, por tanto, la ecuación de la recta tangente en el origen es $y-f(0)=f'(0)(x-0)\Rightarrow y=x$.

55. ¿En qué puntos la recta tangente a la función $f(x)=\text{tg}(2x)$ está menos inclinada que la bisectriz del primer cuadrante?

Queremos encontrar los puntos en los que $|f'(x)|<1$.

Como $f'(x)=\dfrac{2}{\cos^2(2x)}$, esta condición equivale a $2<\cos^2(2x)$, que no tiene solución, ya que $\cos^2(2x)\le 1$ para cualquier x.

Por tanto, no existen puntos que cumplan la condición requerida.

56. Encuentra los puntos con abscisa en $[0, 2\pi]$ para los que la tangente a la curva $f(x)=\text{sen}\,x+\cos x$ es horizontal.

Queremos encontrar los puntos en $[0, 2\pi]$ que verifiquen que $f'(x)=0$.

Como $f'(x)=\cos x-\text{sen}\,x$, tenemos: $f'(x)=0\Rightarrow \text{sen}\,x=\cos x\Rightarrow \text{tg}\,x=1\Rightarrow x=\dfrac{\pi}{4},\ x=\dfrac{5\pi}{4}$.

Por tanto, los puntos buscados son $A\left(\dfrac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ y $B\left(\dfrac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$.

57. Calcula la derivada de las siguientes funciones aplicando la regla de la cadena.

a) $f(x)=\text{arcsen}\left(e^x\right)$

b) $f(x)=\text{arctg}\left(1+x^2\right)$

c) $f(x)=\sqrt{\arccos x}$

d) $f(x)=\ln\left(\text{sen}\,x+\text{arcsen}\,x\right)$

a) $f'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

b) $f'(x)=\dfrac{2x}{1+\left(1+x^2\right)^2}$

c) $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{2\sqrt{\arccos x}}=-\dfrac{1}{2\sqrt{\left(1-x^2\right)\arccos x}}$

d) $f'(x)=\dfrac{\cos x+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\text{sen}\,x+\text{arcsen}\,x}$

58. Halla en qué puntos la recta tangente a la función arco tangente es horizontal.

Como la derivada de la función arco tangente es $f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, no existe ningún punto en el que la derivada se anule, es decir, no existe ningún punto con tangente horizontal.

59. Deriva y simplifica todo lo que puedas la función $f(x)=\text{arctg}(x)+\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

$f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}+\dfrac{-\dfrac{1}{x^2}}{1+\left(\dfrac{1}{x}\right)^2}=\dfrac{1}{1+x^2}-\dfrac{1}{1+x^2}=0$. Observemos que obtenemos el resultado esperado, ya que $\text{arctg}(x)$ y $\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)$ son siempre arcos complementarios, es decir $f(x)=\text{arctg}(x)+\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)=\dfrac{\pi}{2}$, por lo que $f'(x)=0$.

60. Calcula la derivada del arcocotangente.

$\text{arcctg}(x)=\text{arctg}\left(\dfrac{1}{x}\right)\Rightarrow\text{arcctg}(x)=\dfrac{\pi}{2}-\text{arctg}(x)$, por tanto, la derivada de $f(x)=\text{arcctg}(x)$ es $f'(x)=-\dfrac{1}{1+x^2}$.

61. Ejercicio interactivo.

62. Ejercicio resuelto.

63. *Justifica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a) Si $f'(x_0) \le 0$, entonces *f* es decreciente en x_0.

b) Si $f'(x_0) > 0$, entonces *f* es creciente en x_0.

c) Si *f* es decreciente en x_0, entonces $f'(x_0) \le 0$.

a) Falsa, x_0 podría ser un máximo o un mínimo relativo. Por ejemplo, si $f(x) = x^2$, tenemos que $f'(0) = 0$ y *f* tiene un mínimo relativo $x = 0$, por lo que en este punto no crece ni decrece.

b) Verdadera, si $f'(x_0) > 0$, entonces la recta tangente en $P(x_0, f(x_0))$ tiene pendiente positiva, luego *f* es creciente en ese punto.

c) Si $\exists f'(x_0)$ entonces es verdadero, pues si *f* es decreciente en x_0, entonces la recta tangente en $P(x_0, f(x_0))$ es horizontal, es decir, tiene pendiente cero, o es decreciente, es decir, tiene pendiente negativa, en cualquier caso $f'(x_0) \le 0$.

64. ¿Es creciente la función $f(x) = x^3 - x^2 + 1$ en el punto $P(0, 1)$?

$f'(x) = 3x^2 - 2x \Rightarrow f'(0) = 0$, la derivada en el punto no nos proporciona información sobre el crecimiento en dicho punto, por tanto, debemos estudiar el signo de la derivada a la derecha e izquierda de $x = 0$.

Como $f'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$ se anula si $x = 0$ o $x = \frac{2}{3}$ los intervalos de crecimiento y decrecimiento de *f* quedan determinados por la tabla adjunta, de donde deducimos que en el punto *P* la función tiene un máximo relativo, por lo que no es creciente, ni decreciente, en dicho punto.

$-\infty$ 0 $\frac{2}{3}$ $+\infty$

x	$-$	$+$	$+$
$3x - 2$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$-$	$+$
f	↗	↘	↗

65. Señala las abscisas de todos los puntos donde es posible que la función $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ presente un máximo o un mínimo relativo.

$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$, siendo estas las abscisas de los posibles máximo o mínimos relativos.

Si deseamos saber si realmente son máximos o mínimos relativos estudiamos los intervalos de crecimiento de *f*, determinados por la tabla adjunta. Así, en $x = -1$ hay un máximo relativo, en $x = 1$ un mínimo relativo y en $x = 0$ la función es decreciente.

$-\infty$ -1 0 1 $+\infty$

$x + 1$	$-$	$+$	$+$	$+$
x^2	$+$	$+$	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	$+$
f'	$+$	$-$	$-$	$+$
f	↗	↘	↘	↗

66. *Determina los máximos y mínimos relativos, así como los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$ **c)** $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ **e)** $f(x) = 2x^3 - 15x^2 - 36x + 2$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$ **d)** $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$ **f)** $f(x) = 3x^4 + 8x^3 + 6x^2 + 24x + 1$

a) $f'(x) = -4x + 8$ se anula si $x = 2$, es positiva si $x < 2$ y negativa si $x > 2$, por tanto, la función es creciente en $(-\infty, 2)$, decreciente en $(2, +\infty)$ y tiene un máximo relativo en $x = 2$.

Hemos resuelto el apartado en la forma general pero, como la gráfica es una parábola, podemos estudiar los intervalos de crecimiento, los extremos y representar la gráfica sin necesidad de estudiar el signo de la derivada.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x-1)(x-3)$ se anula si $x = 1$ o $x = 3$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, 1) \cup (3, +\infty)$, decreciente en $(1, 3)$, con un máximo relativo en $x = 1$ y un mínimo relativo en $x = 3$.

	$(-\infty, 1)$	$(1, 3)$	$(3, +\infty)$
$x-1$	−	+	+
$x-3$	−	−	+
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

c) $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-1, 1)$, con un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 1$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+1$	−	+	+	+
x^2	+	+	+	+
$x-1$	−	−	−	+
f'	+	−	−	+
f	↗	↘	↘	↗

d) $f'(x) = 4x^3 - 4x = 4x(x+1)(x-1)$ se anula si $x = 0$, $x = -1$ o $x = 1$.

En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-1, 0) \cup (1, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -1) \cup (0, 1)$, con mínimos relativos en $x = -1$ y $x = 1$ y un máximo relativo en $x = 0$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 0)$	$(0, 1)$	$(1, +\infty)$
$x+1$	−	+	+	+
x	−	−	+	+
$x-1$	−	−	−	+
f'	−	+	−	+
f	↘	↗	↘	↗

e) $f'(x) = 6x^2 - 30x - 36 = 6(x-6)(x+1)$ se anula si $x = 6$ o $x = -1$.

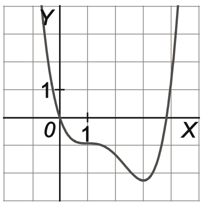
En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty, -1) \cup (6, +\infty)$, decreciente en $(-1, 6)$, con un máximo relativo en $x = -1$ y un mínimo relativo en $x = 6$.

	$(-\infty, -1)$	$(-1, 6)$	$(6, +\infty)$
$x+1$	−	+	+
$x-6$	−	−	+
f'	+	−	+
f	↗	↘	↗

f) $f'(x) = 12x^3 + 24x^2 + 12x + 24 = 12(x+2)(x^2+1)$ se anula si $x = -2$. Como $x^2 + 1$ es siempre positivo, la derivada es positiva si $x > -2$ y negativa si $x < -2$, por tanto, la función es creciente en $(-2, +\infty)$, decreciente en $(-\infty, -2)$ y tiene un mínimo relativo en $x = -2$.

67. *Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ sabiendo que se cumple:

$f'(x) \le 0$ **en** $(-\infty, 3)$**;** $f'(x) > 0$ **en** $(3, +\infty)$**;** $f'(1) = 0$ **y** $f'(3) = 0$**.**



68 y 69. Ejercicios resueltos.

70. Calcula el valor máximo y mínimo de:

a) $f(x)=\sqrt{x^2-6x+10}$ en el intervalo $[0,\ 4]$

b) $f(x)=x^2-3x$ en el intervalo $[2,\ 5]$

c) $f(x)=x^3-3x^2$ en el intervalo $[-1,\ 4]$

d) $f(x)=x^3+4x^2+x-6$ en el intervalo $[-3,\ 4]$

e) $f(x)=3x^5-25x^3+60x$ en el intervalo $[-5,\ 2]$

f) $f(x)=x^4-x^2+1$ en el intervalo $[-2,\ 2]$

En todos los apartados se procede siguiendo la misma pauta: se calcula la derivada de la función; la igualamos a cero y resolvemos dicha ecuación, teniendo en cuenta únicamente las soluciones que pertenezcan al correspondiente intervalo abierto; calculamos el valor de la función en los extremos del intervalo y en los calculados previamente; la imagen mayor será el máximo y la menor será el mínimo.

a) $f'(x)=\dfrac{2x-6}{2\sqrt{x^2-6x+10}}=0 \Rightarrow 2x-6=0 \Rightarrow x=3$, que pertenece al intervalo $(0,\ 4)$.

$f(0)=\sqrt{10}$, $f(3)=1$ y $f(4)=\sqrt{2}$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es $\sqrt{10}$ (se alcanza en $x=0$) y el valor mínimo es 1 (se alcanza en $x=3$).

b) $f'(x)=2x-3=0 \Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$, pero no pertenece al intervalo $(2,\ 5)$.

$f(2)=-2$ y $f(5)=10$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 10 (se alcanza en $x=5$) y el valor mínimo es –2 (se alcanza en $x=2$).

c) $f'(x)=3x^2-6x=0 \Rightarrow x=0,\ x=2$, ambos valores pertenecen al intervalo $(-1,\ 4)$.

$f(-1)=-4$, $f(0)=0$, $f(2)=-4$ y $f(4)=16$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 16 (se alcanza en $x=4$) y el valor mínimo es –4 (se alcanza en $x=-1$ y $x=2$).

d) $f'(x)=3x^2+8x+1=0 \Rightarrow x=\dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}\simeq -2{,}535,\ x=\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}\simeq -0{,}131$, ambos valores pertenecen al intervalo $(-3,\ 4)$.

$f(-3)=0$, $f\left(\dfrac{-4-\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{-70+26\sqrt{13}}{27}\approx 0{,}879$, $f\left(\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}\right)=\dfrac{-70-26\sqrt{13}}{27}\approx -6{,}065$ y $f(4)=126$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 126 (se alcanza en $x=4$) y el valor mínimo es $\dfrac{-70-26\sqrt{13}}{27}$ (se alcanza en $x=\dfrac{-4+\sqrt{13}}{3}$).

e) $f'(x)=15x^4-75x^2+60=0 \Rightarrow x=-2,\ x=-1,\ x=1,\ x=2$, todas las soluciones, salvo la última, pertenecen al intervalo $(-5,2)$.

$f(-5)=-6550$, $f(-2)=-16$, $f(-1)=-38$, $f(1)=38$ y $f(2)=16$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 38 (se alcanza en $x=1$) y el valor mínimo es –6550 (se alcanza en $x=-5$).

f) $f'(x)=4x^3-2x=0 \Rightarrow x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ x=0,\ x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, todas las soluciones pertenecen al intervalo $(-2,\ 2)$.

$f(-2)=13$, $f\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$, $f(0)=1$, $f\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ y $f(2)=13$, por tanto, el valor máximo de la función en el intervalo dado es 13 (se alcanza en $x=-2$ y $x=2$) y el valor mínimo es $\dfrac{3}{4}$ (se alcanza en $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$).

71. Halla dos números reales positivos cuya suma sea 20 y de forma que la suma del cuadrado del mayor y del doble del menor sea mínima.

Sean $0 \le x \le y$ los números buscados. La función que queremos minimizar es $S = y^2 + (2x)^2 = y^2 + 4x^2$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $x + y = 20$, que nos permite despejar una de las variables, por ejemplo *y*, sustituyéndola en la expresión de *S*:

$$y = 20 - x \Rightarrow S = (20 - x)^2 + 4x^2 = 5x^2 - 40x + 400$$

Además, como $0 \le x \le y$, debe cumplirse que $x \in [0, 10]$.

De este modo, debemos minimizar la función $S(x) = 5x^2 - 40x + 400$ en el intervalo $[0, 10]$.

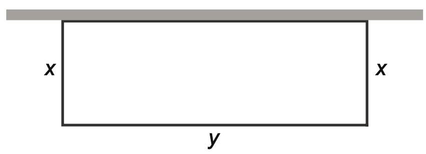
$S'(x) = 10x - 40 = 0 \Rightarrow x = 4$, que pertenece al intervalo $(0, 10)$.

$S(0) = 400$, $S(4) = 320$ y $S(10) = 500$

Por tanto, el mínimo se alcanza en $x = 4$, es decir, los números buscados son $x = 4$ e $y = 16$.

72. Queremos delimitar una parcela rectangular para hacer una huerta y disponemos de 200 m de alambre. Solamente tenemos que utilizar alambre para tres lados de la parcela, pues para el cuarto aprovechamos un muro. Calcula las dimensiones de la parcela de área máxima.

Sean *x* e *y* los lados del rectángulo (ver figura). La función que se quiere maximizar es $A = xy$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $2x + y = 200$, que permite despejar *y*, sustituyéndola en la expresión de *A*:



$y = 200 - 2x \Rightarrow A = x(200 - 2x) = 200x - 2x^2$

Además, *x* e *y* deben ser positivos, por lo que *x* debe estar en el intervalo $[0, 100]$.

De este modo, se quiere maximizar la función $A(x) = 200x - 2x^2$ en el intervalo $[0, 100]$.

$A'(x) = 200 - 4x = 0 \Rightarrow x = 50$, que pertenece al intervalo $(0, 100)$.

$A(0) = 0$, $A(50) = 500$ y $A(100) = 0$, por tanto, el área máxima es de 500 m^2, que se alcanza para $x = 50$ m e $y = 100$ m.

73. Los beneficios de una fábrica de camisetas dependen del número de unidades producido cada día según la función $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ donde *x* indica miles de camisetas producidas al día y $f(x)$ miles de euros. Si las limitaciones de personal y máquinas obligan a producir entre 2000 y 2500 camisetas, ¿cuántas debe producir diariamente para obtener máximos beneficio?

Puesto que *x* indica miles de camisetas, debemos maximizar $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ en el intervalo $[2; 2{,}5]$.

$f'(x) = -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$, que no pertenece al intervalo $(2; 2{,}5)$.

$f(2) = 3$ y $f(2{,}5) = 3{,}75$, por tanto, el beneficio máximo, 3750 €, se alcanza produciendo 2500 camisetas diarias.

74. Ejercicio resuelto.

75. Estudia la curvatura de las siguientes funciones.

a) $f(x) = -2x^2 + 8x$

b) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$

c) $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$

d) $f(x) = 3x^5 - 5x^3$

a) $f'(x) = -4x + 8 \Rightarrow f''(x) = -4$

Como la segunda derivada es siempre negativa, la función es cóncava hacia abajo ($\cap$)en $\mathbb{R}$.

b) $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9 \Rightarrow f''(x) = 6x - 12 = 6(x-2)$

Si $x < 2$, $f''(x) < 0$ y, por tanto, *f* es cóncava hacia abajo ($\cap$) en $(-\infty, 2)$.

Si $x > 2$, $f''(x) > 0$ y, por tanto, *f* es cóncava hacia arriba ($\cup$) en $(2, +\infty)$.

c) $f'(x) = 4x^3 - 4x \Rightarrow f''(x) = 12x^2 - 4 = 12\left(x + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x = -\frac{\sqrt{3}}{3} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{3}}{3} = x_2$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, obteniéndose que *f* es cóncava hacia arriba en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

	$-\infty$ … x_1	x_1 … x_2	x_2 … $+\infty$
$x - x_1$	–	+	+
$x - x_2$	–	–	+
f''	+	–	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cup$

d) $f'(x) = 15x^4 - 15x^2 \Rightarrow f''(x) = 60x^3 - 30x = 60x\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ se anula si $x = 0$, $x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = x_1$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2} = x_2$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, obteniéndose que *f* es cóncava hacia arriba en $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y cóncava hacia abajo en $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

	$-\infty$ … x_1	x_1 … 0	0 … x_2	x_2 … $+\infty$
$x - x_1$	–	+	+	+
x	–	–	+	+
$x - x_2$	–	–	–	+
f''	–	+	–	+
f	$\cap$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

76. Estudia la curvatura y determina la abscisa de los puntos de inflexión de $f(x)$ sabiendo que:

$$f''(x) = (x+1)(x-3)^2(x-7)$$

La segunda derivada se anula si $x = -1$, $x = 3$ o $x = 7$. En la tabla se determinan los intervalos en los que *f* es cóncava hacia arriba $(\cup)$ o hacia abajo $(\cap)$, obteniéndose que *f* es cóncava hacia arriba en $(-\infty, -1) \cup (7, +\infty)$ y cóncava hacia abajo en $(-1, 7)$, siendo los puntos de abscisa $x = -1$ y $x = 7$ los puntos de inflexión.

	$-\infty$ … -1	-1 … 3	3 … 7	7 … $+\infty$
$x + 1$	–	+	+	+
$(x-3)^2$	+	+	+	+
$x - 7$	–	–	–	+
f''	+	–	–	+
f	$\cup$	$\cap$	$\cap$	$\cup$

77. Halla la ecuación de la recta tangente a $y = \dfrac{x}{x^2+1}$ en su punto de inflexión de abscisa positiva.

Si $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, tenemos $f'(x) = \dfrac{\left(x^2+1\right) - x\cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \dfrac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$ y $f''(x) = \dfrac{-2x\left(x^2+1\right)^2 - \left(1-x^2\right)2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4} =$

$= \dfrac{-2x\left(x^2+1\right) - 4x\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} = \dfrac{2x^3-6x}{\left(x^2+1\right)^3}$.

De este modo, el punto de inflexión de abscisa positiva tiene por abscisa la solución positiva de la ecuación $2x^3 - 6x = 0$, es decir, $x = \sqrt{3}$, y la recta tangente en dicho punto de inflexión tiene ecuación $y - f\left(\sqrt{3}\right) = f'\left(\sqrt{3}\right)\left(x-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y - \dfrac{\sqrt{3}}{4} = -\dfrac{1}{8}\left(x-\sqrt{3}\right) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{8}x + \dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

78. ¿Tiene algún punto de inflexión la gráfica de $f(x) = x^2 + \cos x + 1$?

$f'(x) = 2x - \text{sen}\, x \Rightarrow f''(x) = 2 - \cos x$, como $f''(x)$ no se anula nunca, la gráfica de *f* no tienen puntos de inflexión.

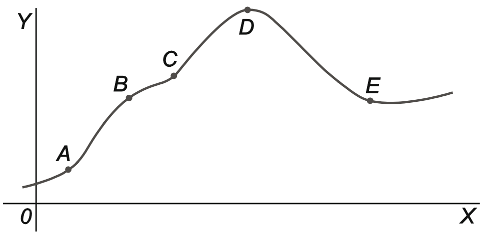
79. Ejercicio interactivo.

80 a 89. Ejercicios resueltos.

EJERCICIOS

Derivada de una función en un punto. Función derivada

90. Considera la gráfica de la figura y contesta, en cada caso, entre qué pareja de puntos consecutivos se cumple la condición dada:



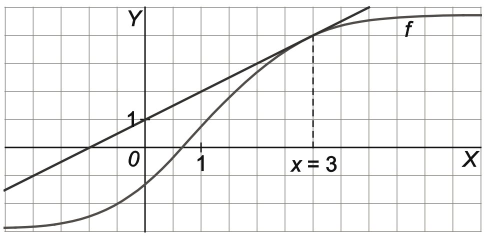
a) La tasa de variación media es negativa.

b) La tasa de variación media es máxima.

c) La tasa de variación media es más próxima a cero.

a) Entre *D* y *E* **b)** Entre *A* y *B* **c)** Entre *B* y *C*

91. Halla la derivada de $f(x)$ en $x = 3$.



La pendiente de la recta tangente es 1 (observemos que las escalas de los ejes son distintas), por tanto, $f'(3) = 1$.

92. Aplicando la definición, halla las siguientes derivadas en los puntos indicados.

a) $f(x) = 2x^2 - 3x$, $x = -1$ y $x = 2$

b) $f(x) = x^3 + x - 5$, $x = 0$ y $x = 5$

c) $f(x) = x^2 - 5$, $x = -2$ y $x = 2$

a) $f'(-1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-1+h) - f(-1)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(-1+h)^2 - 3(-1+h) - 5}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 - 7h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h - 7) = -7$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2(2+h)^2 - 3(2+h) - 2}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{2h^2 + 5h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2h + 5) = 5$

b) $f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + h - 5 + 5}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h^2 + 1) = 1$

$f'(5) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(5+h)^3 + (5+h) - 5 - 125}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^3 + 15h^2 + 76h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h^2 + 15h + 76) = 76$

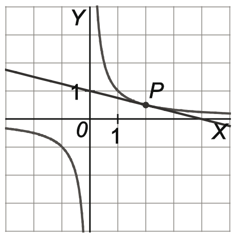
c) $f'(-2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(-2+h) - f(-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(-2+h)^2 - 5 + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 - 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h - 4) = -4$

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{(2+h)^2 - 5 + 1}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{h^2 + 4h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(h + 4) = 4$

93. Aplicando la definición de derivada, obtén la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en el punto $P\left(2, \dfrac{1}{2}\right)$. Dibuja en un mismo sistema de ejes la curva y la tangente obtenida.

$f'(2) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\dfrac{1}{2+h} - \dfrac{1}{2}}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{2h(2+h)} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-1}{2(2+h)} = -\dfrac{1}{4}$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y - \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + 1$.



94. Calcula la ecuación de la recta tangente a la parábola $y = x^2$ trazada desde el punto $P(0, -1)$.

Suponiendo que el punto de tangencia es $Q\left(a, a^2\right)$, la pendiente de la tangente será $2a$, ya que si $f(x) = x^2$ tenemos $f'(x) = 2x$.

Por otro lado, como la recta tangente pasa por P y Q, su pendiente será $\dfrac{a^2 + 1}{a}$, con lo que:

$\dfrac{a^2 + 1}{a} = 2a \Rightarrow a^2 + 1 = 2a^2 \Rightarrow a^2 = 1 \Rightarrow a = 1, a = -1.$

Los puntos de tangencia son, por tanto, $Q_1(1, 1)$ y $Q_2(-1, 1)$, y las respectivas rectas tangentes son $y - 1 = 2(x - 1) \Rightarrow y = 2x - 1$ e $y - 1 = -2(x + 1) \Rightarrow y = -2x - 1$.

95. Halla en qué puntos la recta tangente a la curva $y = x^3 - 5x^2 + 3x - 2$ es horizontal y calcula, en cada caso, la ecuación de dicha tangente.

$f(x) = x^3 - 5x^2 + 3x - 2 \Rightarrow f'(x) = 3x^2 - 10x + 3$

La pendiente de la recta tangente en los puntos buscados es 0, por tanto, sus abscisas verifican $f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 10x + 3 = 0 \Rightarrow x = 3,\ x = \frac{1}{3}$.

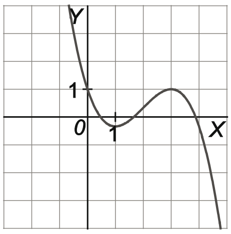
Así, los puntos buscados son $A(3, -11)$ y $B\left(\frac{1}{3}, -\frac{41}{27}\right)$, y las respectivas rectas tangentes son $y = -11$ e $y = -\frac{41}{27}$.

96. Dibuja una posible gráfica para $y = f(x)$ si tienes estos datos sobre la derivada:

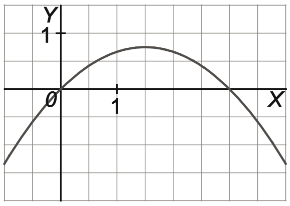
$f'(x) > 0$ en el intervalo (1, 3)

$f'(x) < 0$ para $x < 1$ y para $x > 3$

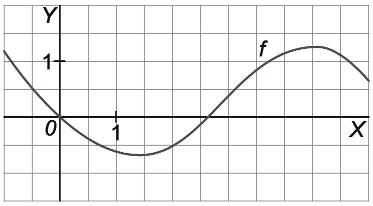
$f'(x) = 0$ para $x = 1$ y para $x = 3$



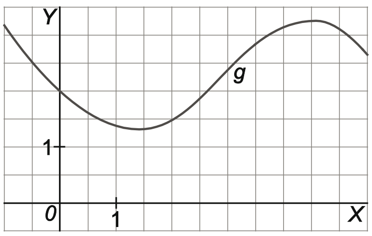
97. Dibuja aproximadamente la gráfica de una función *f* para la que $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f(3) = 0$ y $f'(3) = -1$.



98. Si la gráfica de una función *f* es la de la figura, dibuja aproximadamente la gráfica de una función *g* tal que $g(0) = 2$ y $g'(x) = f'(x)$ para todo *x*.



La gráfica de la función *g* se obtiene trasladando la gráfica de la función *f* dos unidades hacia arriba.



99. Sea f una función para la que $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$. ¿Cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas, cuáles pueden ser falsas y cuáles son con certeza falsas?

a) $f'(2)=2$

b) $f(2)=0$

c) f es continua en $x=0$.

d) f es discontinua en $x=2$.

a) Falsa.

Por definición, si $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ tenemos que f es derivable en $x=2$ y $f'(2)=0$.

b) Puede ser cierta o falsa.

Por ejemplo, si $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x$ tenemos que $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y $f(2)=-2$, sin embargo, si $f(x)=\frac{1}{2}x^2-2x+2$ tenemos que $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y $f(2)=0$.

c) Puede ser cierta o falsa.

Por ejemplo, si $f(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{2}x^2-2x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ tenemos que $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y f es continua en $x=0$, sin embargo, si $f(x)=\begin{cases}1 & \text{si } x<0\\ \frac{1}{2}x^2-2x & \text{si } x\geq 0\end{cases}$ tenemos que $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ y f no es continua en $x=0$.

d) Falsa.

Como hemos visto en el apartado a), si $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h}=0$ tenemos que f es derivable en $x=2$ y por tanto f es continua en $x=2$.

100. Aplicando la definición, calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=5x^2-4x+1$

b) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$

c) $f(x)=\sqrt{x-2}$

d) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[5(x+h)^2-4(x+h)+1\right]-\left[5x^2-4x+1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h^2+10xh-4h}{h}=$

$\lim_{h\to 0}(5h+10x-4)=10x-4$

b) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)^2+1}-\frac{1}{x^2+1}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x^2+1)-((x+h)^2+1)}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h^2-2hx}{h((x+h)^2+1)(x^2+1)}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{-h-2x}{((x+h)^2+1)(x^2+1)}=\frac{-2x}{(x^2+1)^2}$

c) $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{(x+h)-2}-\sqrt{x-2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left(\sqrt{(x+h)-2}-\sqrt{x-2}\right)\left(\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}\right)}{h\left(\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}\right)}=$

$=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\left(\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}\right)}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{(x+h)-2}+\sqrt{x-2}}=\frac{1}{2\sqrt{x-2}}$

d) $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{x+h}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x+h}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}=$

$=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-h}{h\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}==\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{-1}{\sqrt{x+h}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+h}\right)}=\dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$

Derivadas de las operaciones con funciones

101. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\dfrac{x^2-5x^4+12x^3}{2}$

b) $f(x)=\dfrac{x^2}{3x+2}$

c) $f(x)=\left(\dfrac{3x-2}{7-9x}\right)^2$

d) $f(x)=\sqrt{x^9}\,4x^5$

e) $f(x)=\dfrac{x^5\sqrt{x}}{x^{-3}\left(x^2\right)^5}$

f) $f(x)=\dfrac{3}{x^5}+\sqrt{3}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}$

h) $f(x)=(3x-1)^2(1-4x)$

a) $f'(x)=\dfrac{2x-20x^3+36x^2}{2}=x-10x^3+18x^2$

b) $f'(x)=\dfrac{2x(3x+2)-x^2\cdot 3}{(3x+2)^2}=\dfrac{3x^2+4x}{(3x+2)^2}$

c) $f'(x)=2\left(\dfrac{3x-2}{7-9x}\right)\left(\dfrac{3(7-9x)-(3x-2)(-9)}{(7-9x)^2}\right)=\dfrac{6(3x-2)}{(7-9x)^3}$

d) $f(x)=\sqrt{x^9}\,4x^5=4x^{\frac{19}{2}}\Rightarrow f'(x)=4\cdot\dfrac{19}{2}x^{\frac{17}{2}}=38x^8\sqrt{x}$

e) $f(x)=\dfrac{x^5\sqrt{x}}{x^{-3}\left(x^2\right)^5}=\dfrac{x^{\frac{11}{2}}}{x^7}=x^{-\frac{3}{2}}\Rightarrow f'(x)=-\dfrac{3}{2}x^{-\frac{5}{2}}=-\dfrac{3}{2x^2\sqrt{x}}$

f) $f(x)=\dfrac{3}{x^5}+\sqrt{3}=3x^{-5}+\sqrt{3}\Rightarrow f'(x)=-15x^{-6}=-\dfrac{15}{x^6}$

g) $f(x)=\dfrac{1}{x^3}+\dfrac{1}{x^2}=x^{-3}+x^{-2}\Rightarrow f'(x)=-3x^{-4}-2x^{-3}=-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{2}{x^3}$

h) $f'(x)=2(3x-1)\cdot 3\cdot(1-4x)+(3x-1)^2\cdot(-4)=2(3x-1)(3-12x-6x+2)=2(3x-1)(5-18x)$

102. Aplicando la regla de la cadena, calcula las derivadas de las funciones siguientes.

a) $f(x)=\left(3x^3-5x+2\right)^3$ **d)** $f(x)=\sqrt{1-x^4}$ **g)** $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+x}{x^2}$

b) $f(x)=\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^3$ **e)** $f(x)=\left(3x^2-x\right)^{-4}$ **h)** $f(x)=x\sqrt{x^2-1}$

c) $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-3}}{x}$ **f)** $f(x)=\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}$

a) $f'(x)=3\left(3x^3-5x+2\right)^2\left(9x^2-5\right)$

b) $f'(x)=3\left(\dfrac{x+3}{x-1}\right)^2\left(\dfrac{(x-1)-(x+3)}{(x-1)^2}\right)=\dfrac{-12(x+3)^2}{(x-1)^4}$

c) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-3}}x-\sqrt{x^2-3}}{x^2}=\dfrac{3}{x^2\sqrt{x^2-3}}$

d) $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{1-x^4}}\left(-4x^3\right)=\dfrac{-2x^3}{\sqrt{1-x^4}}$

e) $f'(x)=-4\left(3x^2-x\right)^{-5}(6x-1)=\dfrac{-4(6x-1)}{\left(3x^2-x\right)^5}$

f) $f'(x)=\dfrac{\dfrac{x^2-(x+1)2x}{x^4}}{2\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}}=\dfrac{-x^2-2x}{2x^4\sqrt{\dfrac{x+1}{x^2}}}=\dfrac{-x-2}{2x^2\sqrt{x+1}}$

g) $f'(x)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+1\right)x^2-\left(\sqrt{x}+x\right)2x}{x^4}=\dfrac{\dfrac{x\left(1+2\sqrt{x}\right)}{2\sqrt{x}}-2\sqrt{x}-2x}{x^3}=\dfrac{\sqrt{x}\left(1+2\sqrt{x}\right)-4\sqrt{x}-4x}{2x^3}=\dfrac{-3\sqrt{x}-2x}{2x^3}$

h) $f'(x)=\sqrt{x^2-1}+x\cdot\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}=\dfrac{2x^2-1}{\sqrt{x^2-1}}$

103. Halla la ecuación de la recta paralela a $y=x-2$ que es tangente a la parábola $y=4x^2-x+3$.

Si $x=a$ es la abscisa del punto de tangencia, debe cumplirse que $f'(a)=1\Rightarrow 8a-1=1\Rightarrow a=\dfrac{1}{4}$.Por tanto, la recta tangente buscada es $y-f\left(\dfrac{1}{4}\right)=f'\left(\dfrac{1}{4}\right)\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\Rightarrow y-3=x-\dfrac{1}{4}\Rightarrow y=x+\dfrac{11}{4}$.

104. Halla la derivada de la inversa de la función $f(x)=x^3+\sqrt[3]{x}$ en el punto $x=2$.

Si g es la inversa de f tenemos $g'(2)=\dfrac{1}{f'(g(2))}$.

Para calcular $g(2)$ resolvamos la ecuación $f(x)=2\Rightarrow x^3+\sqrt[3]{x}=2\Rightarrow x=1$. Por otra parte, $f'(x)=3x^2+\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, con lo que $g'(2)=\dfrac{1}{f'(1)}=\dfrac{3}{10}$.

105. De dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ sabemos que:

1. $g(x) > 0$ **para todo** x **y** $(f \circ g)(x) = x$

2. $f'(x) = \frac{1}{x}$ **para todo** $x > 0$

a) Si $g(0) = 1$, calcula $g'(0)$.

b) Calcula $g'(x)$ en función de $g(x)$.

$$(f \circ g)(x) = x \Rightarrow f'(g(x))g'(x) = 1 \Rightarrow \frac{g'(x)}{g(x)} = 1 \Rightarrow g'(x) = g(x)$$

a) $g'(0) = g(0) = 1$

b) $g'(x) = g(x)$

Derivadas de las funciones elementales

106. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x) = \left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{\frac{2}{3}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{-3}$

a) $f'(x) = \frac{2}{3}\left(\frac{x}{x^2+1}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot \frac{\left(x^2+1\right) - x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}\sqrt[3]{\frac{x^2+1}{x}}$

b) $f(x) = \sqrt[3]{2x-1} + \left(\frac{1}{x}\right)^{-3} = (2x-1)^{\frac{1}{3}} + x^3 \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(2x-1)^{-\frac{2}{3}} \cdot 2 + 3x^2 = \frac{2}{3\sqrt[3]{(2x-1)^2}} + 3x^2$

107. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2+4}}$ **en el punto** $x = 2$.

$$f(x) = \frac{6}{\sqrt[3]{x^2+4}} = 6\left(x^2+4\right)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = -2\left(x^2+4\right)^{-\frac{4}{3}} \cdot 2x = \frac{-4x}{\sqrt[3]{\left(x^2+4\right)^4}}$$

La ecuación de la recta tangente es $y - f(2) = f'(2)(x-2) \Rightarrow y - 3 = -\frac{1}{2}(x-2) \Rightarrow y = -\frac{1}{2}x + 4$.

108. Deriva las siguientes funciones.

a) $f(x)=e^{\sqrt{x}}$

b) $f(x)=e^{x^2-5x+2}$

c) $f(x)=2^{-2x^3+x^2-4}$

d) $f(x)=\sqrt{e^{5x-1}}$

e) $f(x)=3^{-\sqrt{x^2-x}}$

f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^{-x}}$

g) $f(x)=\ln\left(x^2+4x-1\right)$

h) $f(x)=\ln\sqrt{x^2-5x}$

i) $f(x)=\ln^2(6x+4)$

j) $f(x)=\log_5\left(x^4-x^2\right)$

k) $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

l) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{2x+1}\right)$

a) $f'(x)=e^{\sqrt{x}}\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=\dfrac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}$

b) $f'(x)=e^{x^2-5x+2}(2x-5)$

c) $f'(x)=2^{-2x^3+x^2-4}\cdot\ln 2\cdot\left(-6x^2+2x\right)$

d) $f(x)=\sqrt{e^{5x-1}}=e^{\frac{5x-1}{2}}\Rightarrow f'(x)=e^{\frac{5x-1}{2}}\cdot\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{2}\sqrt{e^{5x-1}}$

e) $f'(x)=3^{-\sqrt{x^2-x}}\ln 3\cdot\dfrac{-(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}=\dfrac{-\ln 3(2x-1)}{2\sqrt{x^2-x}}3^{-\sqrt{x^2-x}}$

f) $f(x)=\dfrac{\ln x}{e^{-x}}=e^x\ln x\Rightarrow f'(x)=e^x\ln x+e^x\cdot\dfrac{1}{x}=e^x\left(\ln x+\dfrac{1}{x}\right)$

g) $f'(x)=\dfrac{2x+4}{x^2+4x-1}$

h) $f(x)=\ln\sqrt{x^2-5x}=\dfrac{1}{2}\ln\left(x^2-5x\right)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{2x-5}{2(x^2-5x)}$

i) $f'(x)=2\ln(6x+4)\cdot\dfrac{6}{6x+4}=\dfrac{6\ln(6x+4)}{3x+2}$

j) $f'(x)=\dfrac{4x^3-2x}{\ln 5\left(x^4-x^2\right)}=\dfrac{4x^2-2}{\ln 5\left(x^3-x\right)}$ con $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

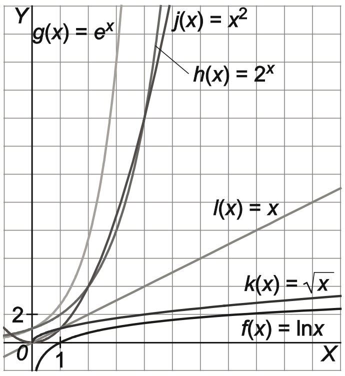
k) $f'(x)=\dfrac{\ln x-x\cdot\dfrac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

l) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x-4}{2x+1}\right)=\ln(x-4)-\ln(2x+1)\Rightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x-4}-\dfrac{2}{2x+1}=\dfrac{9}{(x-4)(2x+1)}$

109. Las siguientes funciones tienen en común que sus límites en $+\infty$ son $+\infty$. Con ayuda de la calculadora haz una tabla de valores y representa sobre los mismos ejes estas funciones y a continuación ordénalas según su crecimiento, de mayor a menor.

$f(x)=\ln x$ $\quad g(x)=e^x$ $\quad h(x)=2^x$

$j(x)=x^2$ $\quad k(x)=\sqrt{x}$ $\quad l(x)=x$



Como se observa en las gráficas, para valores grandes de x, las funciones ordenadas de mayor a menor crecimiento son $g(x)=e^x$, $h(x)=2^x$, $j(x)=x^2$, $l(x)=x$, $k(x)=\sqrt{x}$ y $f(x)=\ln x$.

110. ¿Cuál es el valor mínimo que puede tomar la función $f(x)=2^{x^2-2x}$?

El valor mínimo de f se alcanza cuando se alcanza el valor mínimo de su exponente, que a su vez se alcanza en el vértice de la parábola $y=x^2-2x$, es decir, cuando $x=1$. Por tanto, el valor mínimo de f es $f(1)=2^{-1}=\dfrac{1}{2}$.

111. Halla las asíntotas y estudia el signo de la función $f(x)=e^x+\ln x$, para $x\in(0,+\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, así que no hay asíntotas horizontales. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, por lo que $y=0$ es una asíntota vertical. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ (véase el ejercicio 109), por lo que no hay asíntotas oblicuas.

No podemos calcular de manera exacta los puntos de corte de la gráfica de f con el eje X, por lo que no podemos determinar exactamente el signo de f, pero como $f'(x)=e^x+\dfrac{1}{x}>0$ en $(0,+\infty)$, f es creciente, por tanto, no puede tener más de un punto de corte con el eje X. Además, como f es continua, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, es seguro que tendrá un punto de corte con el eje X, digamos en $x=a$, siendo f negativa en $(0,a)$ y positiva en $(a,+\infty)$.

Aunque no podemos calcular con exactitud el valor de a, podemos aproximarlo observando que $f(0{,}2)\simeq -0{,}388$ y $f(0{,}3)\simeq 0{,}146$, es decir, $a\in(0{,}2;\,0{,}3)$.

112. Calcula la derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x)=\left(x^2-3x\right)^{x^2}$

b) $f(x)=(x+\ln x)^{\sqrt{x}}$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$

d) $f(x)=\left(e^x+x\right)^x$

a) $\ln f(x)=x^2\ln\left(x^2-3x\right)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=2x\ln\left(x^2-3x\right)+x^2\frac{2x-3}{x^2-3x}=2x\ln\left(x^2-3x\right)+\frac{2x^3-3x^2}{x^2-3x}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=\left(x^2-3x\right)^{x^2}\left[2x\ln\left(x^2-3x\right)+\frac{2x^3-3x^2}{x^2-3x}\right]=\left(x^2-3x\right)^{x^2}\left[2x\ln\left(x^2-3x\right)+\frac{2x^2-3x}{x-3}\right]$

b) $\ln f(x)=\sqrt{x}\ln(x+\ln x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln(x+\ln x)+\sqrt{x}\frac{1+\frac{1}{x}}{x+\ln x}=\frac{\ln(x+\ln x)}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}\,(x+1)}{x(x+\ln x)}\Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x)=(x+\ln x)^{\sqrt{x}}\left[\frac{\ln(x+\ln x)}{2\sqrt{x}}+\frac{x+1}{\sqrt{x}\,(x+\ln x)}\right]$

c) $f(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}=x^{-\frac{1}{x}}\Rightarrow\ln f(x)=-\frac{1}{x}\ln x\Longrightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\frac{1}{x^2}\ln x-\frac{1}{x}\frac{1}{x}=\frac{1}{x^2}(\ln x-1)\Rightarrow f'(x)=\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}(\ln x-1)$

d) $\ln f(x)=x\ln\left(e^x+x\right)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=\ln\left(e^x+x\right)+x\cdot\frac{e^x+1}{e^x+x}\Rightarrow f'(x)=\left(e^x+x\right)^x\left[\ln\left(e^x+x\right)+\frac{x\left(e^x+1\right)}{e^x+x}\right]$

113. Halla la derivada de estas funciones.

a) $f(x)=\operatorname{sen}\left(3x^2-x\right)$

b) $f(x)=\cos(\ln x+5x)$

c) $f(x)=\cos^5\left(x^5+1\right)^5$

d) $f(x)=\operatorname{tg}\left(2x^2+x\right)$

e) $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}+4x^3\right)$

f) $f(x)=\operatorname{sen}^3\left(x^2-4\right)$

g) $f(x)=x^3\operatorname{sen}\left(x^2\right)$

h) $f(x)=e^{-x}\operatorname{sen}\left(x^3\right)$

i) $f(x)=\operatorname{cotg}\left(x^3-5\right)$

j) $f(x)=\operatorname{tg}(\cos x)$

k) $f(x)=x^2\operatorname{tg}\left(x^3\right)$

l) $f(x)=\operatorname{cotg}(\ln x)$

a) $f'(x)=\cos\left(3x^2-x\right)\cdot(6x-1)=(6x-1)\cos\left(3x^2-x\right)$

b) $f'(x)=-\operatorname{sen}(\ln x+5x)\cdot\left(\frac{1}{x}+5\right)=-\left(\frac{1}{x}+5\right)\operatorname{sen}(\ln x+5x)$

c) $f'(x)=5\cos^4\left(x^5+1\right)^5\left[-\operatorname{sen}\left(x^5+1\right)^5\right]\left[5\left(x^5+1\right)^4\cdot5x^4\right]=-125x^4\left(x^5+1\right)^4\operatorname{sen}\left(x^5+1\right)^5\cos^4\left(x^5+1\right)^5$

d) $f'(x)=\frac{4x+1}{\cos^2\left(2x^2+x\right)}$

e) $f'(x)=-\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}+4x^3\right)\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+12x^2\right)=-\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}+12x^2\right)\operatorname{sen}\left(\sqrt{x}+4x^3\right)$

f) $f'(x)=3\operatorname{sen}^2\left(x^2-4\right)\cos\left(x^2-4\right)\cdot2x=6x\operatorname{sen}^2\left(x^2-4\right)\cos\left(x^2-4\right)$

g) $f'(x)=3x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)+x^3\cos\left(x^2\right)\cdot2x=3x^2\operatorname{sen}\left(x^2\right)+2x^4\cos\left(x^2\right)$

h) $f'(x)=-e^{-x}\operatorname{sen}\left(x^3\right)+e^{-x}\cos\left(x^3\right)\cdot3x^2=-e^{-x}\operatorname{sen}\left(x^3\right)+3x^2e^{-x}\cos\left(x^3\right)$

i) Observemos que si $F(x) = \text{cotg}(f(x)) = \text{tg}^{-1}(f(x))$, derivando tenemos:

$$F'(x) = -\text{tg}^{-2}(f(x)) \cdot \frac{f'(x)}{\cos^2(f(x))} = -\frac{f'(x)}{\text{tg}^2(f(x))\cos^2(f(x))} = -\frac{f'(x)}{\text{sen}^2(f(x))}$$

De este modo, $f'(x) = -\dfrac{3x^2}{\text{sen}^2\left(x^3-5\right)}$

j) $f'(x) = \dfrac{-\text{sen}\, x}{\cos^2(\cos x)}$

k) $f'(x) = 2x\,\text{tg}\left(x^3\right) + x^2\dfrac{3x^2}{\cos^2\left(x^3\right)} = 2x\,\text{tg}\left(x^3\right) + \dfrac{3x^4}{\cos^2\left(x^3\right)}$

l) Aplicando la fórmula deducida en el apartado i) tenemos $f'(x) = -\dfrac{\frac{1}{x}}{\text{sen}^2(\ln x)} = -\dfrac{1}{x\,\text{sen}^2(\ln x)}$

114. Escribe la expresión más simplificada de la derivada de la función $f(x) = \ln\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right)$.

$$f(x) = \ln\left(\cos^2 x - \text{sen}^2 x\right) = \ln(\cos 2x) \Rightarrow f'(x) = \frac{-2\,\text{sen}\,2x}{\cos 2x} = -2\,\text{tg}\,2x \text{ con } x \in \left(-\frac{\pi}{4}+k\pi, \frac{\pi}{4}+k\pi\right)$$

115. Calcula las derivadas de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \text{arcsen}\left(x - e^{-x}\right)$

b) $f(x) = \arccos\left(2x - \sqrt{x}\right)$

c) $f(x) = \text{arcsen}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$

d) $f(x) = \arccos(1 - \ln x)$

e) $f(x) = \text{arctg}(3x-1)$

f) $f(x) = \text{arctg}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

a) $f'(x) = \dfrac{1+e^{-x}}{\sqrt{1-\left(x-e^{-x}\right)^2}}$

b) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-\left(2x-\sqrt{x}\right)^2}} \cdot \left(2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$

c) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{(x+1)^2}}} \cdot \dfrac{(x+1)-x}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{(x+1)\sqrt{2x+1}}$

d) $f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-(1-\ln x)^2}} \cdot \dfrac{1}{x} = -\dfrac{1}{x\sqrt{1-(1-\ln x)^2}}$

e) $f'(x) = \dfrac{3}{1+(3x-1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{1+\dfrac{1+x}{1-x}} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}} \cdot \dfrac{(1-x)-(1+x)(-1)}{(1-x)^2} = \dfrac{1-x}{2} \cdot \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} \cdot \dfrac{2}{(1-x)^2} = \dfrac{1}{2(1-x)}\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}} = \dfrac{1}{2\sqrt{1-x^2}}$

116. ¿Existe algún punto de la gráfica de $f(x)=\ln\sqrt{\dfrac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}$ con tangente horizontal?

$$f(x)=\ln\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen} x}{1-\operatorname{sen} x}}=\frac{1}{2}\left[\ln(1+\operatorname{sen} x)-\ln(1-\operatorname{sen} x)\right]\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{2}\left[\frac{\cos x}{1+\operatorname{sen} x}-\frac{-\cos x}{1-\operatorname{sen} x}\right]=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}^2 x}=\frac{1}{\cos x}$$

La derivada de *f* no se anula nunca, por lo que no existen puntos en su gráfica con tangente horizontal.

Aplicaciones de la derivada primera. Optimización

117. Encuentra los máximos y mínimos relativos de estas funciones, indica los intervalos de crecimiento y decrecimiento y esboza su gráfica.

a) $p(x)=x^2-5x+12$

b) $r(x)=2x^3-3x^2$

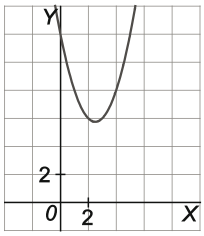
c) $t(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$

d) $q(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$

e) $s(x)=(x-3)(x+2)$

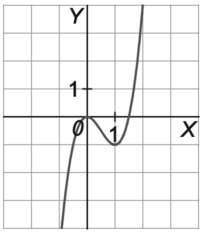
f) $u(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$

a) $p'(x)=2x-5$ se anula si $x=\dfrac{5}{2}$, es negativa si $x<\dfrac{5}{2}$ y positiva si $x>\dfrac{5}{2}$. Por tanto, *q* es decreciente en el intervalo $\left(-\infty,\dfrac{5}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$. Además tiene un mínimo relativo (de hecho absoluto) en $x=\dfrac{5}{2}$.



b) $r'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$ se anula si $x=0$ o $x=1$.

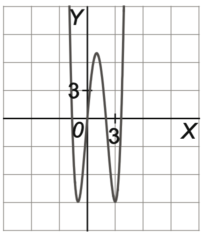
En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-\infty,0)\cup(1,+\infty)$, decreciente en $(0,1)$, con un máximo relativo en $x=0$ y un mínimo relativo en $x=1$.



	$-\infty$ … 0	0 … 1	1 … $+\infty$
x	−	+	+
$x-1$	−	−	+
r'	+	−	+
r	↗	↘	↗

c) $t'(x)=4x^3-12x^2-4x+12=4(x+1)(x-1)(x-3)$ se anula si $x=-1$, $x=1$ o $x=3$.

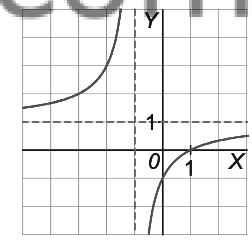
En la tabla adjunta se determinan los intervalos de crecimiento y los extremos relativos de la función: es creciente en $(-1,1)\cup(3,+\infty)$, decreciente en $(-\infty,-1)\cup(1,3)$, con mínimos relativos en $x=-1$ y $x=3$ y un máximo relativo en $x=1$.



	$+\infty$ … −1	−1 … 1	1 … 3	3 … $+\infty$
$x+1$	−	+	+	+
$x-1$	−	−	+	+
$x-3$	−	−	−	+
t'	−	+	−	+
t	↘	↗	↘	↗

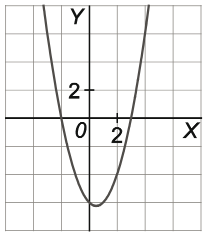
d) $q'(x) = \dfrac{(x+1)-(x-1)}{(x+1)^2} = \dfrac{2}{(x+1)^2}$ es positiva si $x \neq -1$, por tanto q es creciente en su dominio $\mathbb{R} - \{-1\}$, con lo que no tiene extremos relativos.

Para representar la gráfica observemos que $y = 1$ es asíntota horizontal y $x = -1$ es asíntota vertical.



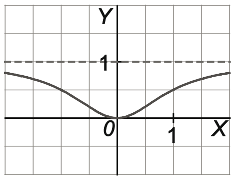
e) $s'(x) = (x+2)+(x-3) = 2x-1$ se anula si $x = \dfrac{1}{2}$, es negativa si $x < \dfrac{1}{2}$ y positiva si $x > \dfrac{1}{2}$.

Por tanto, s es decreciente en el intervalo $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right)$ y creciente en $\left(\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Además tiene un mínimo relativo (de hecho absoluto) en $x = \dfrac{1}{2}$.



f) $u'(x) = \dfrac{2x\left(1+x^2\right) - x^2 2x}{\left(1+x^2\right)^2} = \dfrac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}$ se anula si $x = 0$, es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$. Por tanto, u es decreciente en el intervalo $(-\infty, 0)$ y creciente en $(0, +\infty)$. Además, tiene un mínimo relativo (de hecho absoluto) en $x = 0$.

Para representar la gráfica observemos que $y = 1$ es asíntota horizontal.



118. Calcula qué valores deben tener las constantes *a*, *b*, *c* y *d* para que la función $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tenga un mínimo relativo en el punto $P(-2, -3)$, un máximo relativo para $x = 1$ y además $f(0) = -1$.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \Rightarrow f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

Como f tiene un mínimo relativo en P tenemos $f(-2) = -3$ y $f'(-2) = 0$; como tiene un máximo relativo en $x = 1$ tenemos $f'(1) = 0$, finalmente, $f(0) = -1$, con lo cual obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(-2) = -3 \\ f'(-2) = 0 \\ f'(1) = 0 \\ f(0) = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -8a + 4b - 2c + d = -3 \\ 12a - 4b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ d = -1 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{1}{5},\ b = -\frac{3}{10},\ c = \frac{6}{5},\ d = -1$$

Por tanto, tenemos $f(x) = -\dfrac{1}{5}x^3 - \dfrac{3}{10}x^2 + \dfrac{6}{5}x - 1$.

119. Halla los valores de las constantes *a*, *b* y *c* que hacen que la parábola $f(x) = ax^2 + bx + c$ pase por el punto *P*(–1, 20) y tenga un máximo relativo en *Q*(3, 12).

$f(x) = ax^2 + bx + c \Rightarrow f'(x) = 2ax + b$

Las condiciones del enunciado nos dan el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} f(-1) = 20 \\ f(3) = 12 \\ f'(3) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - b + c = 20 \\ 9a + 3b + c = 12 \\ 6a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{2},\ b = -3,\ c = \frac{33}{2}$$

Por tanto, tenemos $f(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - 3x + \dfrac{33}{2}$.

120. Halla los puntos de la parábola $y = x^2$ de abscisa no negativa que estén más cerca del punto $P\left(0, \frac{3}{2}\right)$.

Pongamos que el punto buscado es $P(x, y)$ con $x > 0$. La función que queremos minimizar es $D = \sqrt{x^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2}$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $y = x^2$, que nos permite sustituir la variable *y* en la expresión de *D*, obteniendo $D = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$.

De este modo, debemos minimizar la función $D(x) = \sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}$ en el intervalo $[0, +\infty)$.

$D'(x) = \dfrac{2x + 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)2x}{2\sqrt{x^2 + \left(x^2 - \frac{3}{2}\right)^2}} = 0 \Rightarrow 2x + 2\left(x^2 - \frac{3}{2}\right)2x = 0 \Rightarrow 4x^3 - 4x = 0 \Rightarrow x = -1,\ x = 0,\ x = 1$, pero solo $x = 1$ pertenecen al intervalo $(0, +\infty)$.

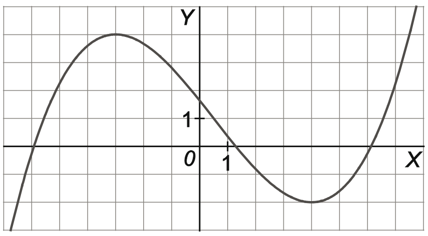
$D(0) = \frac{3}{2}$, $D(1) = \frac{\sqrt{5}}{2}$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} D(x) = +\infty$, por lo que la distancia mínima es $\frac{\sqrt{5}}{2}$, que se alcanza en el punto de la parábola *P*(1, 1).

121. Esboza la gráfica de una función que tenga las tres características siguientes:

I. $f'(x) > 0$ si $x < -3$ o si $x > 4$

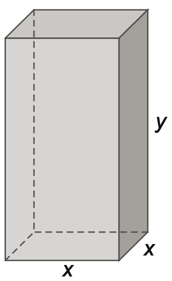
II. $f'(x) < 0$ si $-3 < x < 4$

III. $f(-3) = 4$ y $f(4) = -2$



122. Halla las dimensiones de una caja sin tapa en forma de paralelepípedo de base cuadrada y de 192 cm² de área total para que el volumen sea máximo.

Sean *x* e *y* las dimensiones de la caja, como se muestra en la figura.



La función que queremos maximizar es $V = x^2y$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $x^2 + 4xy = 192$, que nos permite despejar una variable y sustituir en la expresión de *V*:

$$x^2 + 4xy = 192 \Rightarrow y = \frac{192 - x^2}{4x} \Rightarrow V = \frac{192x - x^3}{4}$$

Además, *x* e *y* deben ser positivos, por lo que *x* debe estar en el intervalo $\left[0, \sqrt{192}\right] = \left[0, 8\sqrt{3}\right]$.

De este modo, debemos maximizar la función $V(x) = \dfrac{192x - x^3}{4}$ en el intervalo $\left[0, 8\sqrt{3}\right]$.

$V'(x) = \dfrac{192 - 3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = 64 \Rightarrow x = -8,\ x = 8$, pero solo $x = 8$ pertenece al intervalo $\left(0, 8\sqrt{3}\right)$.

$V(0) = 0$, $V(8) = 256$ y $V(8\sqrt{3}) = 0$, por lo que el volumen máximo es 256 cm³, que se alcanza cuando las dimensiones de la caja son $x = 8$ cm e $y = 4$ cm.

123. De todas las rectas que pasan por $P(1, 4)$, calcula la ecuación de la que determina con los semiejes positivos un triángulo de área mínima.

Sean $Q(x, 0)$ y $R(0, y)$ los puntos de corte de la recta con los ejes. Queremos minimizar la función $A = \dfrac{xy}{2}$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe una relación de ligadura, ya que los puntos Q, P y R están alineados, es decir, tenemos $\dfrac{-x}{1-x} = \dfrac{y}{4} \Rightarrow 4x + y - xy = 0$, que nos permite despejar una de las variables y sustituir en la expresión de A:

$$4x + y - xy = 0 \Rightarrow y = \frac{4x}{x-1} \Rightarrow A = \frac{2x^2}{x-1}$$

Además, x e y deben ser positivos, por lo que x debe pertenecer al intervalo $(1, +\infty)$.

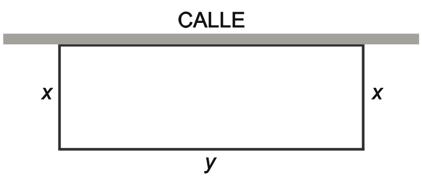
De este modo, queremos minimizar la función $A(x) = \dfrac{2x^2}{x-1}$ en el intervalo $(1, +\infty)$.

$A'(x) = \dfrac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 4x}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Rightarrow 2x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = 2$, solo $x = 2$ pertenece al intervalo $(1, +\infty)$.

$\lim\limits_{x \to 1^+} A(x) = +\infty$, $A(2) = 8$ y $\lim\limits_{x \to +\infty} A(x) = +\infty$, por tanto, el área mínima, 8 u^2, se alcanza cuando $Q(2, 0)$ y $R(0, 8)$, es decir, la ecuación de la recta buscada es $y = -4x + 8$.

124. Queremos delimitar una parcela rectangular de 700 m^2 de superficie. La valla que utilizamos en el lado que da a la calle vale 40 euros el metro lineal y la valla de los otros tres lados vale 16 euros el metro lineal. Por razones obvias ningún lado de la parcela debe medir menos de un metro. Calcula las dimensiones de la parcela para que la valla sea la más barata posible.

Sean x e y los lados del rectángulo, siendo y el lado que da a la calle (ver figura). La función que queremos minimizar es $C = 32x + 56y$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $xy = 700$, que nos permite despejar y, sustituyéndola en la expresión de A:



$$xy = 700 \Rightarrow y = \frac{700}{x} \Rightarrow C = 32x + \frac{39200}{x}$$

Además, x e y deben ser al menos 1, por lo que x debe estar en el intervalo $[1, 700]$.

De este modo, queremos minimizar la función $C(x) = 32x + \dfrac{39200}{x}$ en el intervalo $[1, 700]$.

$C'(x) = 32 - \dfrac{39200}{x^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1225 \Rightarrow x = -35,\ x = 35$, solo $x = 35$ pertenece al intervalo $(1, 700)$.

$C(1) = 39232,\ C(35) = 2240$ y $C(700) = 22456$, por tanto, el coste mínimoes de 2240 €, que se alcanza cuando $x = 35$ m e $y = 20$ m.

Aplicaciones de la derivada segunda

125. Calcula las abscisas de los puntos de inflexión de $f(x)$ si $f''(x) = (x-2)(x-4)^2(x+5)$.

Los posibles puntos de inflexión son los de abscisa $x = 2$, $x = 4$ o $x = -5$.

Como f'' solo cambia de signo al pasar por $x = 2$ y $x = -5$, estas son las abscisas de los puntos de inflexión de f.

126. Determina la posición de los puntos de inflexión de las siguientes funciones indicando, en su caso, si son o no de tangente horizontal.

a) $f(x)=x^4-x^2$

b) $f(x)=x^5+3x^3-1$

c) $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+12x$

d) $f(x)=e^{-x^2}$

e) $f(x)=\cos^3 x$

f) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

a) $f'(x)=4x^3-2x \Rightarrow f''(x)=12x^2-2=12\left(x+\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$ se anula si $x=-\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ o $x=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que $f'\left(-\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\neq 0$ y $f'\left(\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)\neq 0$.

b) $f'(x)=5x^4+9x^2 \Rightarrow f''(x)=20x^3+18x=2x(10x^2+9)$ se anula si $x=0$ y cambia de signo al pasar por este valor, con lo que en $x=0$ tenemos un punto de inflexión, además $f'(0)=0$, por lo que la tangente es horizontal.

c) $f'(x)=4x^3-12x^2-4x+12 \Rightarrow f''(x)=12x^2-24x-4=4\left(x-\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}\right)$ se anula si $x=\dfrac{3-2\sqrt{3}}{3}$ o $x=\dfrac{3+2\sqrt{3}}{3}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que f' no se anula en estos valores.

d) $f'(x)=-2xe^{-x^2} \Rightarrow f''(x)=-2e^{-x^2}+4x^2e^{-x^2}=\left(4x^2-2\right)e^{-x^2}=4\left(x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-x^2}$ se anula si $x=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ o $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que f' no se anula en estos valores.

e) $f'(x)=-3\cos^2 x\,\mathrm{sen}x \Rightarrow f''(x)=6\cos x\,\mathrm{sen}^2x-3\cos^3 x=3\cos x\left(2\mathrm{sen}^2x-\cos^2 x\right)=3\cos x\left(3\mathrm{sen}^2x-1\right)$

f'' se anula si $\cos x=0$ o $\mathrm{sen}x=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{3}$, es decir, llamando α al ángulo del primer cuadrante tal que $\mathrm{sen}\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ($\alpha\simeq 0{,}615$ rad) tenemos que f'' se anula si $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$, $x=\alpha+\pi k$ o $x=-\alpha+\pi k$ para algún entero k. Al pasar por todos estos valores f'' cambia de signo, ya que $\left(3\mathrm{sen}^2x-1\right)$ se puede factorizar en factores lineales en sen x, por lo que todos estos puntos son puntos de inflexión, ahora bien, solo si $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k$ para algún entero k la tangente es horizontal, ya que en los demás valores f' no se anula.

f) $f'(x)=\dfrac{-2x}{\left(x^2+1\right)^2} \Rightarrow f''(x)=\dfrac{-2\left(x^2+1\right)^2+2x\cdot 2\left(x^2+1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^4}=\dfrac{6x^2-2}{\left(x^2+1\right)^3}=\dfrac{6\left(x+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(x-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)}{\left(x^2+1\right)^3}$ se anula si $x=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ o $x=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ y cambia de signo al pasar por estos valores, por tanto, estas son las abscisas de los puntos de inflexión, pero en ellos la tangente no es horizontal, ya que f' no se anula en estos valores.

127. Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, calcula la ecuación de la recta tangente en su punto de inflexión.

$f'(x) = 3x^2 - 6x$ y $f''(x) = 6x - 6$

La derivada segunda se anula si $x = 1$ y cambia de signo al pasar por este valor, con lo que es el punto de inflexión, así, la tangente buscada es $y - f(1) = f'(1)(x-1) \Rightarrow y + 1 = -3(x-1) \Rightarrow y = -3x + 2$.

Síntesis

128. En cada caso, halla los valores de *a* y *b* para que *f* sea derivable en todo $\mathbb{R}$

a) $f(x) = \begin{cases} a & \text{si } x < -2 \\ x^2 - bx + 1 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} 2ax + b & \text{si } x \leq 2 \\ x^3 + ax + 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

a) El único punto donde la función podría no ser derivable es en $x = -2$. Para que *f* sea derivable en dicho punto una condición necesaria (no suficiente) es que sea continua en él, además las derivadas laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to -2^+} f(x) \\ f'(-2^-) = f'(-2^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 4 + 2b + 1 \\ 0 = -4 - b \end{cases} \Rightarrow a = -3,\ b = -4$$

b) El único punto donde la función podría no ser derivable es en $x = 2$. Para que *f* sea derivable en dicho punto una condición necesaria es que sea continua en él, además las derivadas laterales deben ser iguales. Por tanto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \\ f'(2^-) = f'(2^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4a + b = 8 + 2a + 2 \\ 2a = 12 + a \end{cases} \Rightarrow a = 12,\ b = -14$$

129. Sean *f* y *g* dos funciones tales que $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, $f'(x) = g(x)$ y $g'(x) = -f(x)$.

Considera la función $h(x) = f^2(x) + g^2(x)$, calcula $h'(x)$ y utiliza el resultado obtenido para probar que $f^2(x) + g^2(x) = 1$ sea cual sea *x*.

$h'(x) = 2f(x)f'(x) + 2g(x)g'(x) = 2f(x)g(x) - 2g(x)f(x) = 0$ para todo *x*, por tanto $h(x)$ es constante.

Así, como $h(0) = 1$, tenemos $h(x) = 1$ para todo *x*, es decir, $f^2(x) + g^2(x) = 1$ para todo *x*.

130. Calcula la derivada de todas estas funciones.

a) $f(x)=x\ln(x)-x$

b) $f(x)=e^{\text{sen}^2 x}+e^{\cos^2 x}$

c) $f(x)=\ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$

d) $f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$

e) $f(x)=-\ln(\cos x)$

f) $f(x)=\text{arcsen}\, e^x$

g) $f(x)=(\text{sen}\, x)^{e^x}$

h) $f(x)=\ln(\text{tg}\, x)$

i) $f(x)=2\,\text{sen}\, x\cos x$

j) $f(x)=\dfrac{\cos x}{e^x}$

k) $f(x)=\left(e^x\right)^{\text{sen}\, x}$

l) $f(x)=\text{sen}\sqrt{\ln(\cos x)}$

a) $f'(x)=\ln x+x\cdot\dfrac{1}{x}-1=\ln x$

b) $f'(x)=e^{\text{sen}^2 x}\cdot 2\,\text{senx}\cos x+e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x(-\text{sen}\, x)=2\,\text{senx}\cos x\left(e^{\text{sen}^2 x}-e^{\cos^2 x}\right)=\text{sen}\, 2x\left(e^{\text{sen}^2 x}-e^{\cos^2 x}\right)$

c) $f'(x)=\dfrac{1}{\dfrac{x+1}{x-1}}\cdot\dfrac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{-2}{(x+1)(x-1)}=\dfrac{2}{1-x^2}$ con $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$

d) $f'(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$

e) $f'(x)=-\dfrac{-\text{sen}\, x}{\cos x}=\text{tg}\, x$ con $x\in\left(-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right)$ con $k\in\mathbb{Z}$

f) $f'(x)=\dfrac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

g) $\ln f(x)=e^x\ln(\text{sen}\, x)\Rightarrow\dfrac{f'(x)}{f(x)}=e^x\ln(\text{sen}\, x)+e^x\dfrac{\cos x}{\text{sen}\, x}\Rightarrow f'(x)=(\text{sen}\, x)^{e^x}e^x\left(\ln(\text{sen}\, x)+\text{cotg}\, x\right)$

h) $f'(x)=\dfrac{1}{\text{tg}\, x}\cdot\dfrac{1}{\cos^2 x}=\dfrac{1}{\text{sen}\, x\cos x}=\dfrac{2}{\text{sen}\, 2x}$ con $x\in\left(k\pi,\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)$ con $k\in\mathbb{Z}$

i) $f(x)=2\,\text{sen}\, x\cos x=\text{sen}\, 2x\Rightarrow f'(x)=2\cos 2x$

j) $f'(x)=\dfrac{-\text{sen}\, x\cdot e^x-\cos x\cdot e^x}{e^{2x}}=-\dfrac{\text{sen}\, x+\cos x}{e^x}$

k) $f(x)=\left(e^x\right)^{\text{sen}\, x}=e^{x\,\text{sen}\, x}\Rightarrow f'(x)=e^{x\,\text{sen}\, x}\left(\text{sen}\, x+x\cos x\right)$

l) La función $f(x)=\text{sen}\sqrt{\ln\cos x}$ solo existe en punots aislados $x=2k\pi$ y no se puede derivar.

131. Halla un punto de la curva $y=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}$ en el que la recta tangente forme un ángulo de 45º con la horizontal.

Si $f(x)=\dfrac{3\sqrt[3]{x^2}}{2}=\dfrac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}$, buscamos un punto con $f'(x)=1\Rightarrow\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=1\Rightarrow\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}=1\Rightarrow\sqrt[3]{x}=1\Rightarrow x=1$, por tanto, el punto buscado es $P\left(1,\dfrac{3}{2}\right)$.

132. Halla los máximos y mínimos de la función $f(x) = e^{x^2}$.

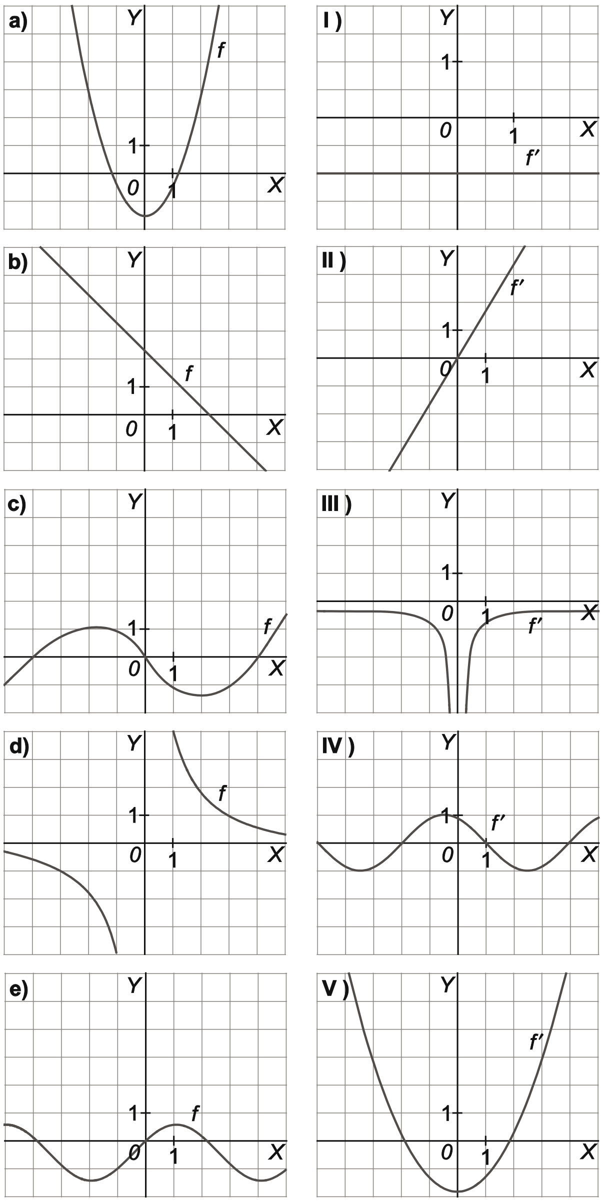
El enunciado no especifica si debemos calcular los máximos y mínimos relativos o absolutos así que calcularemos ambos.

$f'(x) = 2xe^{x^2}$ se anula si $x = 0$, es negativa si $x < 0$ y positiva si $x > 0$, por tanto $x = 0$ es un mínimo relativo, de hecho absoluto, ya que el mínimo valor de de *f* se alcanza cuando el exponente x^2 es mínimo, es decir, si $x = 0$.

Como la derivada no se anula en otro valor distinto de $x = 0$, la función no tiene máximos relativos, ni por tanto absolutos, ya que como la función es derivable en $\mathbb{R}$, la derivada se anularía en cualquier máximo absoluto.

Otra manera de probar que no hay máximos absolutos es observar que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

133. Empareja cada una de estas gráficas con las gráficas de su correspondiente derivada.



La gráfica de la derivada de la función representada en a) debe pasar por el punto *A*(0, 0), ya que la función tiene mínimo en dicho punto. La única gráfica que cumple esto es la II.

La función representada en b) es una recta, por tanto,su derivada debe ser constante, luego es la I.

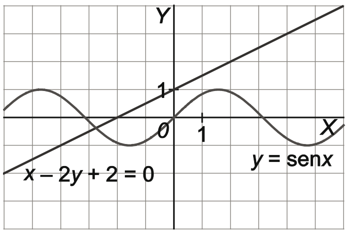
La función representada en c) tiene un máximo a la izquierda del cero y un mínimo a la derecha, luego su derivada debe cortar al eje de abscisas en esos dos puntos. Así pues es la V.

La función representada en d) no tiene extremos relativos, por tanto, su derivada no corta al eje *X*, luego es la III.

Por último, la función representada en e) queda emparejada con la IV.

Observemos que también podríamos habernos fijado en los intervalos de crecimiento y decrecimiento para emparejar las gráficas.

134. Encuentra todas las rectas tangentes a la curva $y = \operatorname{sen} x$ que sean paralelas a la recta indicada en la figura.



La recta indicada tiene pendiente $m = \frac{1}{2}$, luego si $f(x) = \operatorname{sen} x$ debe verificarse $f'(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$.

Por tanto, $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$ o $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ para algún entero k.

En el primer caso la recta tangente es:

$$y - f\left(\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \Rightarrow y - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \text{ para algún entero } k.$$

En el segundo caso la recta tangente es:

$$y - f\left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \Rightarrow y + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\pi}{3} - 2\pi k\right) \text{ para algún entero } k.$$

135. Dadas las funciones $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + x + 1}$ y $g(x) = \ln(x + 8)$, halla la función $g \circ f$ y su derivada.

A partir de la de la expresión $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1}\right) = \ln\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)$, derivándola:

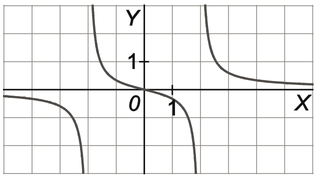
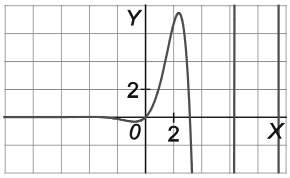
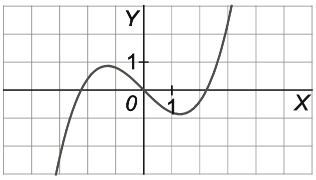
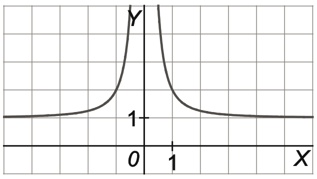
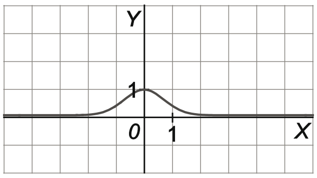
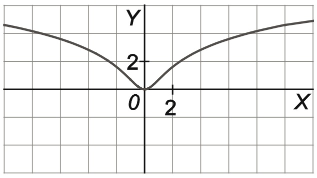
$$(g \circ f)'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} \cdot \frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}} = \frac{2x + 1}{3\left(x^2 + x + 1 + 8\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}\right)}$$

De otro modo, usando la regla de la cadena: $f'(x) = \frac{1}{3}\left(x^2 + x + 1\right)^{-\frac{2}{3}}(2x + 1) = \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}}$ y $g'(x) = \frac{1}{x + 8}$, por tanto, $(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8} \cdot \frac{2x + 1}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}} = \frac{2x + 1}{3\left(\sqrt[3]{x^2 + x + 1} + 8\right)\sqrt[3]{\left(x^2 + x + 1\right)^2}}$.

136. Explica con claridad por qué la función $f(x) = \cos 2x - 4x$ no tiene extremos relativos.

Si la función tuviera extremos relativos, la derivada se anularía en ellos, pero $f'(x) = -2\operatorname{sen} 2x - 4$ no se anula nunca, ya que $-2\operatorname{sen} 2x - 4 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} 2x = -2$ no tiene solución.

137. Asocia cada función de la izquierda con su correspondiente gráfica de la derecha.

$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$	
$f(x)=e^{-x^2}$	
$f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$	
$f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$	
$f(x)=e^x senx$	
$f(x)=\dfrac{x^3}{5}-x$	

La función $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x^2}$ es par y su dominio es $\mathbb{R}-\{0\}$, su gráfica es la cuarta. Observemos, además, que $x=0$ es asíntota vertical de f, $y=1$ es asíntota horizontal y su derivada $f'(x)=\dfrac{-2}{x^3}$ es positiva si $x<0$ y negativa si $x>0$, es decir, f es creciente en $(-\infty,\,0)$ y decreciente en $(0,\,+\infty)$.

La función $f(x)=e^{-x^2}$ es par, siempre es positiva y $f(0)=1$, por lo que su gráfica es la quinta. Esta elección se confirma observando que $x=0$ es asíntota horizontal de fo estudiando el signo de $f'(x)=-2xe^{-x^2}$ para determinar los intervalos de crecimiento y extremos de f.

La función $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$ es impar y su dominio es $\mathbb{R}-\{-2,\,2\}$, por lo que su gráfica es la primera. Esta elección se confirma estudiando las asíntotas fo el signo de $f'(x)=\dfrac{-x^2-4}{(x^2-4)^2}$.

La función es $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)$ es par, por lo que, por descarte, su gráfica debe ser la sexta, lo que se puede confirmar estudiando el signo de $f'(x)=\dfrac{2x}{x^2+1}$.

La función $f(x)=\dfrac{x^3}{5}-x$ es impar, por lo que, por descarte, su gráfica debe ser la tercera, lo que se puede confirmar estudiando el signo de $f'(x)=\dfrac{3x^2}{5}-1$.

Por último, la gráfica de la función $f(x)=e^x senx$ es la segunda, lo que de nuevo se puede confirmar estudiando el signo de su derivada.

138. Se considera la función:

$$\boldsymbol{f(x)=\frac{1}{2+\operatorname{sen}x-\cos x}}$$

Calcula sus extremos relativos y/o absolutos en el intervalo $[-\pi,\,\pi]$.

$f'(x)=-\dfrac{\cos x+\operatorname{sen}x}{(2+\operatorname{sen}x-\cos x)^2}=0\Rightarrow \operatorname{sen}x=-\cos x\Rightarrow \operatorname{tg}x=-1$, que, en el intervalo $(-\pi,\,\pi)$, solo se verifica si $x=-\dfrac{\pi}{4}$ o $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

$f(-\pi)=f(\pi)=\dfrac{1}{3}$, $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ y $f\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$, por lo que, en el intervalo $[-\pi,\,\pi]$, la función alcanza su máximo absoluto en $x=-\dfrac{\pi}{4}$ y su mínimo absoluto en $x=\dfrac{3\pi}{4}$.

Estos serán también un máximo y mínimo relativos, respectivamente, y no existe ningún otro valor donde $f$pueda presentar un extremo local, ya que la derivada no se anula en ningún otro valor distinto de los anteriores.

139. Sea la función $f(x)=x^2e^{\frac{x}{1000}}$. Calcula sus máximos y mínimos en el intervalo cerrado $[-3000,\ 3000]$.

$f'(x)=2xe^{\frac{x}{1000}}+\frac{x^2}{1000}e^{\frac{x}{1000}}=x\left(\frac{x}{1000}+2\right)e^{\frac{x}{1000}}$ se anula si $x=0$ o $x=-2000$ y ambos valores pertenecen al intervalo $(-3000,\ 3000)$.

Como f' es positiva si $x<-2000$, negativa si $-2000<x<0$ y positiva si $x>0$, $x=-2000$ es un máximo realtivo y $x=0$ es un mínimo relativo.

Como $f(-3000)=9\cdot 10^6e^{-3}$, $f(3000)=9\cdot 10^6e^3$, $f(-2000)=4\cdot 10^6e^{-2}$ y $f(0)=0$, el máximo absoluto de f en el intervalo $[-3000,\ 3000]$ se alcanza en $x=3000$ y el mínimo absoluto en $x=0$.

140. Calcular $f'(0)$ sabiendo que $f(x)=[g(x)]^{\cos x}$ y que $g(0)=g'(0)=e$.

$$\ln f(x)=\cos x\ln g(x)\Rightarrow\frac{f'(x)}{f(x)}=-\operatorname{sen}x\ln g(x)+\cos x\frac{g'(x)}{g(x)}\Rightarrow f'(x)=[g(x)]^{\cos x}\left(-\operatorname{sen}x\ln g(x)+\frac{g'(x)\cos x}{g(x)}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(0)=e^1\left(-0\cdot\ln e+\frac{e\cdot 1}{e}\right)=e$$

141. Sea la función $f(x)=\operatorname{sen}e^x$. Calcula la derivada de $(f\circ f)(x)$.

Podemos obtener en primer lugar $(f\circ f)(x)$ y después derivar:

$$(f\circ f)(x)=f(f(x))=f\left(\operatorname{sen}e^x\right)=\operatorname{sen}\left(e^{\operatorname{sen}e^x}\right)\Rightarrow f'(x)=\cos\left(e^{\operatorname{sen}e^x}\right)\cdot e^{\operatorname{sen}e^x}\cdot\cos e^x\cdot e^x$$

También podemos usar la regla de la cadena:

Como $f'(x)=\cos e^x\cdot e^x=e^x\cos e^x$ tenemos $(f\circ f)'(x)=f'(f(x))f'(x)=e^{\operatorname{sen}e^x}\cdot\cos\left(e^{\operatorname{sen}e^x}\right)\cdot e^x\cdot\cos e^x$

142. Considera las funciones definidas para $x\geq 0$:

$$f(x)=\operatorname{arcsen}\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ \text{y}\ g(x)=\arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

a) Calcula $f'(x)$ y $g'(x)$, y exprésalas del modo más simplificado posible.

b) Compara los resultados y deduce justificadamente la diferencia entre $f(x)$ y $g(x)$.

a) $$f'(x)=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{1+x^2}$$

$$g'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}\cdot\frac{\sqrt{1+x^2}-x\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}=-\sqrt{1+x^2}\cdot\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}=-\frac{1}{1+x^2}$$

b) Según el apartado anterior $f(x)+g(x)$ es constante, ya que $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)=0$. Como $f(0)+g(0)=0+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}$ obtenemos que $f(x)+g(x)=\frac{\pi}{2}$.

CUESTIONES

143. Comprueba la veracidad de la afirmación "Para cualquier función f que verifique que $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$, resulta que $\lim\limits_{h\to 0} f(3+h)=f(3)$"

La afirmación es verdadera, ya que si $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=2$ tenemos que *f* es derivable en $x=3$, de hecho $f'(3)=2$, así pues *f* es continua en $x=3$ y, por ello, $\lim\limits_{h\to 0} f(3+h)=f(3)$.

144. De las siguientes afirmaciones determina cuáles son verdaderas y cuáles no.

a) Si $f(3)>g(3)$ entonces $f'(3)\geq g'(3)$.

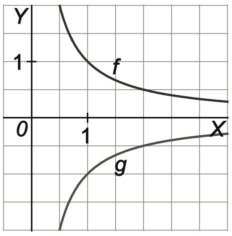
b) Si $f(2)=0$ entonces $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=0$.

c) Si *f* y *g* son derivables en todos los puntos de su dominio y $f(x)g(x)=x$, entonces no hay ningún valor para el que se anulen simultáneamente $f'(x)$ y $g'(x)$.

d) Cualquier función polinómica de grado superior a 2 presenta algún punto de inflexión.

e) Si $f''(a)=0$ entonces *f* tiene un punto de inflexión en $x=a$.

a) Falsa, como se muestra en la figura, $f(3)>g(3)$, sin embargo f' es negativa (*f* es decreciente) y g' es positiva (*g* es creciente), por lo que $f'(3)<g'(3)$.



b) Falsa, el límite $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$ es $f'(2)$ y, obviamente, $f(2)=0$ no implica necesariamente $f'(2)=0$, basta tomar, por ejemplo, $f(x)=x-2$.

c) Verdadera, derivando los dos miembros de $f(x)g(x)=x$ tenemos $f'(x)g(x)+f(x)g'(x)=1$, de donde se deduce que $f'(x)$ y $g'(x)$ no pueden anularse simultáneamente.

d) Falsa, $f(x)=x^4$ nos sirve de contraejemplo.

e) Falsa, nos sirve el mismo contraejemplo del apartado anterior, $f''(0)=0$ pero $x=0$ no es un punto de inflexión de *f*.

145. Justifica que si $f'(x)>0$ para cualquier número real, entonces la función $g(x)=f(f(x))$ es creciente en $\mathbb{R}$.

La derivada de $g(x)=f(f(x))$ es $g'(x)=f'(f(x))f'(x)$, que es positiva para cualquier *x*, por tanto *g* es creciente.

146. Razona si son verdaderas o falsas las afirmaciones siguientes.

a) Si $f'(x) < 0$ para cualquier número real *x*, entonces la función $g(x) = f(f(x))$ es decreciente en $\mathbb{R}$.

b) Hay funciones para las que $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ y $f(x) < 0$ para cualquier número real *x.*

c) Hay funciones para las que $f''(x) > 0$ pero $f'(x) < 0$ para cualquier número real *x.*

d) Si *f* y *g* son funciones derivables en $\mathbb{R}$ con $f(a) = g(a)$, $f(b) = g(b)$, $f(x) > g(x)$ en (a, b) entonces existe $c \in (a, b)$ con $f'(c) = g'(c)$.

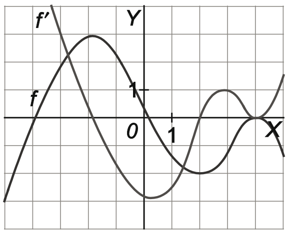
a) Falsa. De hecho, si $f'(x) < 0$ para cualquier número real *x*, entonces la función $g(x) = f(f(x))$ es creciente en $\mathbb{R}$, ya que $g'(x) = f'(f(x))f'(x)$ es positiva por ser producto de dos números negativos.

b) Falsa. Pensemos en el punto $(0, f(0))$, su tangente es $y - f(0) = f'(0)x \Rightarrow y = f'(0)x + f(0)$, y como $f''(x) > 0$ la gráfica de *f* está por encima de esta tangente, es decir, $f(x) \geq f'(0)x + f(0)$ para cualquier número real *x*. Pero esto no es posible, ya que al ser $f'(0) > 0$, $f'(0)x + f(0)$ será positivo a partir de un determinado valor de *x*, lo que implicaría que $f(x) > 0$ a partir de un determinado valor de *x*.

c) Verdadera. Por ejemplo, la función $f(x) = e^{-x}$.

d) Verdadera. De hecho, es innecesario asumir que $f(x) > g(x)$ en (a, b). En efecto, consideremos la función $h(x) = f(x) - g(x)$, continua y derivable, con $h(a) = h(b) = 0$. Esta función alcanzará máximo y mínimo absoluto en el intervalo $[a, b]$. Si alcanza alguno de ellos en un valor $c \in (a, b)$ tendremos que $h'(c) = 0$; en caso contrario alcanza el máximo y mínimo absolutos en *a* y *b*, de donde se deduce que $h(x) = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$, por lo que $h'(x) = 0$ para cualquier $x \in [a, b]$. En cualquier caso encontramos algún valor $c \in (a, b)$ con $h'(c) = 0$, es decir, con $f'(c) = g'(c)$.

147. Observa las figuras siguientes y justifica si, tal y como se indica, pueden corresponder a una función y a su derivada.



Las gráficas no pueden corresponder a una función y a su derivada, ya que a la derecha de $x = 4$ se observa que *f* es decreciente y f' es positiva, lo que no es posible.

PROBLEMAS

148. Se llama recta normal a una curva en un punto de la misma a la perpendicular a la tangente a la curva en dicho punto. Calcula la recta normal a la gráfica de la función $y = \ln x$ en el punto de abscisa $x = 2$.

Si $f(x) = \ln x$, la pendiente de la recta tangente en el punto de abscisa $x = 2$ es $m = f'(2) = \frac{1}{2}$, por tanto, la pendiente de la recta normal es $-\frac{1}{m} = -2$, con lo que su ecuación es $y - f(2) = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 4 + \ln 2$.

149. Un malabarista lanza verticalmente una pelota. Su ecuación del movimiento es $s(t) = -6t^2 + 48t$ [t se mide en segundos, y $s(t)$, en centímetros]. Se pide:

a) ¿Con qué velocidad inicial se lanza la pelota?

b) ¿En qué instante la pelota empieza a descender?

c) ¿Cuál es la altura máxima a la que llega?

d) ¿Cuánto tiempo está la pelota en movimiento?

e) ¿Qué velocidad lleva la pelota en los instantes $t = 3$ y $t = 7$? ¿Por qué son de distinto signo?

a) La velocidad de la pelota en un instante t viene dada por $s'(t) = -12t + 48$, con lo que la velocidad inicial es $s'(0) = 48$ cm/seg.

b) La pelota comienza a descender cuando su velocidad se anula, o cuando llega a su máxima altura si se prefiere, es decir, cuando $s'(t) = 0 \Rightarrow -12t + 48 = 0 \Rightarrow t = 4$ seg.

c) $s(4) = 96$ cm.

d) Como la pelota tarda lo mismo en subir que en bajar, está en movimiento 8 segundos.

e) La velocidad en el instante $t = 3$ es $s'(3) = 12$ cm/seg y en el instante $t = 7$ es $s'(7) = -36$ cm/seg. Son de distinto signo porque en el instante $t = 3$ la pelota está subiendo y en el instante $t = 7$ está bajando.

150. Una partícula se mueve sobre un eje según la siguiente ecuación de movimiento: $s(t) = 4t^2 - 8t - 3$, donde t indica el tiempo en segundos, y $s(t)$, la distancia orientada, en metros, al origen.

a) ¿Dónde está situada la partícula en el momento de empezar a moverse?

b) Estudia la posición de la partícula en los instantes $t = 1$ y $t = 5$.

c) ¿En qué instante la partícula se detiene y cambia el sentido de su movimiento?

a) $s(0) = -3$, es decir, la partícula está a 3 metros a la izquierda del origen.

b) $s(1) = -7$ y $s(5) = 57$, es decir, en el instante $t = 1$ la partícula está a 7 metros a la izquierda del origen y en el instante $t = 5$ está a 57 metros a la derecha del origen.

c) La partícula se detiene cuando su velocidad es 0 y cambia el sentido de su movimiento cuando su velocidad cambia de signo. Como la velocidad viene dada por $s'(t) = 8t - 8$, en el instante $t = 1$ la partícula se detiene y cambia el sentido de su movimiento.

151. Halla los valores de la constante k para los que las rectas tangentes a las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = (x - k)x$ en el punto de abscisa $x = 1$ son:

a) Paralelas

b) Perpendiculares

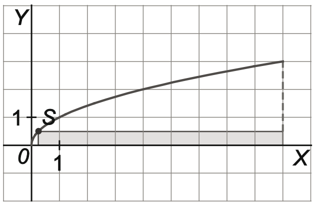
Las pendientes de las rectas tangentes en el punto de abscisa $x = 1$ son, respectivamente, $f'(x) = 3x^2 \Rightarrow f'(1) = 3$ y $g'(x) = 2x - k \Rightarrow g'(1) = 2 - k$.

a) Si las tangentes son paralelas, entonces $f'(1) = g'(1) \Rightarrow 3 = 2 - k \Rightarrow k = -1$.

b) Si las tangentes son perpendiculares, entonces $f'(1)\, g'(1) = -1 \Rightarrow 3(2 - k) = -1 \Rightarrow k = \dfrac{7}{3}$.

152. Dibuja la región del primer cuadrante limitada por las gráficas de $y = \sqrt{x}$, $x = 9$, $y = 0$ y calcula las dimensiones del rectángulo inscrito de lados paralelos a los ejes y que tenga:

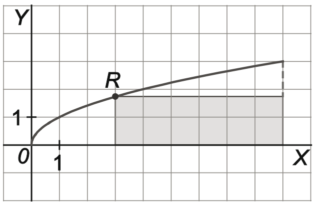
a) Máxima área **b)** Máximo perímetro



a) Calculemos el área del rectángulo en función de la abscisa x del punto $R\left(x, \sqrt{x}\right)$. Como la base del rectángulo es $9 - x$ y la altura es $\sqrt{x}$, el área es $A(x) = (9 - x)\sqrt{x}$ con $x \in [0, 9]$.

$A'(x) = -\sqrt{x} + \dfrac{(9-x)}{2\sqrt{x}} = \dfrac{9-3x}{2\sqrt{x}} = 0 \Rightarrow x = 3$, que pertenece al intervalo $(0, 9)$.

$A(0) = A(9) = 0$ y $A(3) = 6\sqrt{3}$, por lo que el área máxima es $6\sqrt{3}$ u^2, que se alcanza cuando $R\left(3, \sqrt{3}\right)$, es decir, cuando el rectángulo tiene base 6 u y altura $\sqrt{3}$ u.

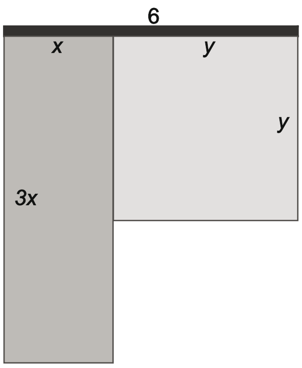


b) Calculemos el perímetro en función de la abscisa x del punto $S\left(x, \sqrt{x}\right)$. Como la base del rectángulo es $9 - x$ y la altura es $\sqrt{x}$, el perímetro es $P(x) = 2\left(9 - x + \sqrt{x}\right)$ con $x \in [0, 9]$.

$P'(x) = 2\left(-1 + \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2\sqrt{x}} = 1 \Rightarrow \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow x = \dfrac{1}{4}$, que pertenece al intervalo $(0, 9)$.

$P(0) = 18$, $P\left(\dfrac{1}{4}\right) = \dfrac{37}{2}$ y $P(9) = 6$, por lo que el perímetro máximo es $\dfrac{37}{2} = 18{,}5$ u, que se alcanza cuando $S\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{2}\right)$, es decir, cuando el rectángulo tiene base $\dfrac{35}{4}$ u y altura $\dfrac{1}{2}$ u.

153. Un artista ha adquirido un listón de 6 m de largo del que quiere colgar dos grandes telas rectangulares, una a continuación de la otra y que ocupen todo el listón: la primera ha de ser naranja, y el lado que está sobre el listón debe ser un tercio del lado que cuelga; la otra será verde y debe tener forma de cuadrado. ¿Qué dimensiones deben tener las telas para que su superficie sea la mínima posible?



Sean x e y las longitudes de los lados sobre el listón de la tela naranja y la tela verde respectivamente.

La función que queremos minimizar es $A(x) = 3x^2 + y^2$, esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $x + y = 6$, que nos permite despejar y, sustituyéndola en la expresión de A:

$$y = 6 - x \Rightarrow A = 3x^2 + (6-x)^2 = 4x^2 - 12x + 36$$

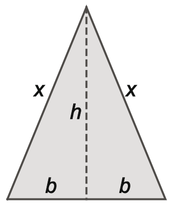
Además, x debe estar en el intervalo $[0, 6]$.

De este modo, queremos minimizar la función $A(x) = 4x^2 - 12x + 36$ en el intervalo $[0, 6]$.

$A'(x) = 8x - 12 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{3}{2}$, que pertenece al intervalo $(0, 6)$.

$A(0) = 36$, $A\left(\dfrac{3}{2}\right) = 27$ y $A(6) = 108$, por tanto, la superficie mínima es de 27 m^2, que se alcanza cuando $x = \dfrac{3}{2} = 1{,}5$ m e $y = 4{,}5$ m, es decir, cuando la tela naranja tiene dimensiones 1,5 x 4,5 metros y la verde 4,5 x 4,5 metros.

154. Encuentra la base y la altura del triángulo isósceles de perímetro 50 cm que tenga la mayor área posible.



Llamemos x, x y $2b$ a los lados del triángulo y h a su altura.

La función que queremos maximizar es $A=\frac{2bh}{2}=bh$,esta función depende de dos variables, pero tenemos las relaciones:

$$2x+2b=50 \Rightarrow b=25-x$$

$$x^2=h^2+b^2=h^2+(25-x)^2 \Rightarrow h=\sqrt{x^2-(25-x)^2}=\sqrt{50x-625}$$

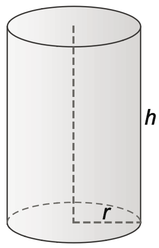
Además, x, b y $h$deben ser positivos.

De este modo, queremos maximizar la función $A(x)=(25-x)\sqrt{50x-625}$ en el intervalo $[12,5;\ 25]$.

$A'(x)=-\sqrt{50x-625}+(25-x)\frac{50}{2\sqrt{50x-625}}=\frac{1250-75x}{\sqrt{50x-625}}=0 \Rightarrow x=\frac{50}{3}$, que pertenece al intervalo $(12,5;\ 25)$.

$A(12,5)=A(25)=0$ y $A\left(\frac{50}{3}\right)=\frac{625\sqrt{3}}{9}\simeq 120,28$, por tanto, el área máxima se alcanza cuando el triángulo es un triángulo equilátero de lado $\frac{50}{3}$ cm (con lo que la altura es $\frac{25\sqrt{3}}{3}$ cm).

155. Una lata cilíndrica de cierto refresco tiene un volumen de 333 cm³. La chapa utilizada para las bases es doble de cara que la utilizada para la cara lateral. Calcula las dimensiones de la lata para que el coste de fabricación sea el menor posible.



Llamemos r al radio de la base y h a la altura de la lata.

Teniendo en cuenta que el área lateral es $2\pi rh$, que el área de cada base es πr^2 y que la chapa de las bases cuesta el doble que la chapa lateral, queremos minimizar la función $C=2\pi rh+4\pi r^2$.

Esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $\pi r^2 h=333$, que nos permite despejar h y sustituir en la expresión de C:

$$h=\frac{333}{\pi r^2} \Rightarrow C=\frac{666}{r}+4\pi r^2$$

Además $r>0$, por lo que queremos minimizar la función $C(r)=\frac{666}{r}+4\pi r^2$ en el intervalo $(0,+\infty)$.

$C'(r)=-\frac{666}{r^2}+8\pi r=0 \Rightarrow r^3=\frac{333}{4\pi} \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{333}{4\pi}}\simeq 2,98$, que pertenece al intervalo $(0,+\infty)$.

Como $\lim_{r\to o^+} A(r)=\lim_{r\to+\infty} A(r)=+\infty$, el mínimo de la función se alcanza cuando $r=\sqrt[3]{\frac{333}{4\pi}}\simeq 2,98$ cm y $h=2\sqrt[3]{\frac{666}{\pi}}\simeq 11,93$ cm, es decir, el coste de fabricación es el menor posible si las latas tienen 3cm de radio y 12 cm de altura aproximadamente.

156. La página de un libro tiene un área de 600 cm². Si los cuatro márgenes miden 2 cm, calcula las dimensiones de la página para que la parte impresa sea la mayor posible.

Si x e y son las dimensiones de la página, queremos maximizar la función $A=(x-4)(y-4)$.

Esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $xy=600$, que nos permite despejar y sustituir en la expresión de A:

$$y=\frac{600}{x}\Rightarrow A=(x-4)\left(\frac{600}{x}-4\right)=-4x-\frac{2400}{x}+616$$

Además, $x-4$ e $y-4$ son positivos, por lo que queremos maximizar la función $A(x)=(x-4)\left(\frac{600}{x}-4\right)$ en el intervalo [4, 150].

$A'(x)=-4+\frac{2400}{x^2}=0\Rightarrow x^2=600\Rightarrow x=-10\sqrt{6},\ x=10\sqrt{6}$, pero solo $x=10\sqrt{6}$ pertenece al intervalo (4, 150).

$A(4)=A(150)=0$ y $A\left(10\sqrt{6}\right)\simeq 420{,}04$, por tanto, la parte impresa tiene el mayor tamaño posible cuando la hoja es cuadrada de lado $x=10\sqrt{6}$ cm.

157. Un meteorito se mueve, en un cierto sistema de referencia, según una trayectoria dada por la curva $y=\frac{x}{x+3}$. Desde el punto $A(5, 1)$ se lanza en línea recta una sonda para que intercepte al meteorito cuando ambos tengan velocidades paralelas.

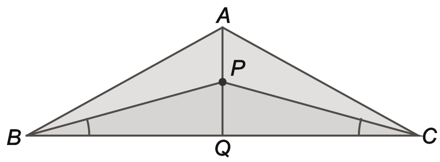
Calcula la ecuación de la trayectoria de la sonda. (Fíjate que el problema equivale a calcular la recta tangente a la curva que sigue el meteorito desde el punto de partida de la sonda).

La trayectoria es la recta que pasa por $A(5, 1)$ y $B\left(b, \frac{b}{b+3}\right)$ y es tangente a $f(x)=\frac{x}{x+3}$ en el punto de abscisa $x=b$.

Por tanto, se debe cumplir que $f'(b)=\frac{\frac{b}{b+3}-1}{b-5}\Rightarrow\frac{3}{(b+3)^2}=-\frac{3}{(b+3)(b-5)}$ y, como $b+3\neq 0$, obtenemos $b-5=-(b+3)\Rightarrow b=1$, con lo que la ecuación de la trayectoria es $y-1=\frac{3}{16}(x-5)\Rightarrow y=\frac{3}{16}x+\frac{1}{16}$.

158. En un triángulo isósceles ABC con $AB=AC$, $BC=4$ y de altura sobre BC igual a 1, ¿dónde debemos escoger un punto de dicha altura para que la suma de las tres distancias a los vértices sea mínima?

Sea Q el pie de la altura sobre BC y llamemos $x=PQ$, queremos minimizar la función $S(x)=1-x+2\sqrt{x^2+4}$ en el intervalo [0, 1].



$S'(x)=-1+\frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}=0\Rightarrow\sqrt{x^2+4}=2x\Rightarrow x^2+4=4x^2\Rightarrow x^2=\frac{4}{3}\Rightarrow$

$\Rightarrow x=-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ (Falsa), $x=\frac{2\sqrt{3}}{3}$, pero este valor no pertenece al intervalo (0, 1), por lo que el mínimo se alcanza en uno de los extremos del intervalo.

Como $S(0)=5$ y $S(1)=2\sqrt{5}$, el mínimo se alcanza si $x=1$, es decir, si $P=A$.

159. Halla a y b para que la función $f(x) = a\ln x + bx^2 + x$ tenga extremos relativos en los puntos de abscisa $x = 1$ y $x = 2$. ¿Qué tipo de extremos son (máximos o mínimos)?

La derivada $f'(x) = \frac{a}{x} + 2bx + 1$ se anula cuando $x = 1$ y $x = 2$, por tanto, tenemos:

$$\begin{cases} a + 2b + 1 = 0 \\ \frac{a}{2} + 4b + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{2}{3},\ b = -\frac{1}{6} \Rightarrow f(x) = -\frac{2}{3}\ln x - \frac{1}{6}x^2 + x$$

Para verificar que tipo de extremos son usaremos la segunda derivada $f''(x) = \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$:

$f''(1) = \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$ en $x = 1$ hay un mínimo relativo.

$f''(2) = -\frac{1}{6} < 0 \Rightarrow$ en $x = 2$ hay un máximo relativo.

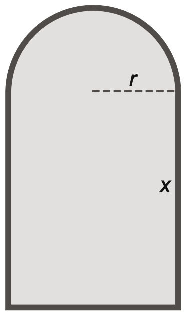
160. Sea la función $f(x) = \operatorname{sen} x$. Calcula sus primeras derivadas f', f'', f''', … y deduce una fórmula para encontrar su derivada enésima.

$f'(x) = \cos x$ $\quad$ $f''(x) = -\operatorname{sen} x$ $\quad$ $f'''(x) = -\cos x$ $\quad$ $f^{iv}(x) = \operatorname{sen} x$

Las derivadas se van repitiendo en bloques de cuatro, es decir,

$$f^{n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k \\ \cos x & \text{si } n = 4k+1 \\ -\operatorname{sen} x & \text{si } n = 4k+2 \\ -\cos x & \text{si } n = 4k+3 \end{cases}$$

161. Se considera una ventana en la que la parte inferior es un rectángulo, y la superior, un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es 6 metros, calcula las dimensiones de la parte rectangular para que entre un máximo de luz.



Llamemos x a la altura del rectángulo y r al radio del semicírculo.

Para que entre la máxima luz, la superficie de la ventana debe ser máxima, es decir, queremos maximizar la función $A = 2rx + \frac{\pi r^2}{2}$. Esta función depende de dos variables, pero entre ellas existe la relación de ligadura $\pi r + 2x + 2r = 6$, que nos permite despejar y sustituir en la expresión de A:

$$x = 3 - \frac{2+\pi}{2}r \Rightarrow A = 2r\left(3 - \frac{2+\pi}{2}r\right) + \frac{\pi r^2}{2} = 6r - 2r^2 - \frac{\pi}{2}r^2 = 6r - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)r^2$$

Además, x y r deben ser positivos, por lo que queremos maximizar la función $A(r) = 6r - \left(\frac{4+\pi}{2}\right)r^2$ en el intervalo $\left[0, \frac{6}{2+\pi}\right]$.

$A'(r) = 6 - 2\left(\frac{4+\pi}{2}\right)r = 0 \Rightarrow r = \frac{6}{4+\pi}$, que pertenece al intervalo $\left(0, \frac{6}{2+\pi}\right)$.

$A(0) = 0$, $A\left(\frac{6}{2+\pi}\right) = \frac{18\pi}{(2+\pi)^2} \simeq 2{,}139$ y $A\left(\frac{6}{4+\pi}\right) = \frac{18}{4+\pi} \simeq 2{,}52$, por tanto, el máximo de luz entra cuando $r = \frac{6}{4+\pi} \simeq 0{,}84$ m y $x = 3 - \frac{2+\pi}{2}r = 3 - \frac{2+\pi}{2}\cdot\frac{6}{4+\pi} = \frac{3(4+\pi) - 3(2+\pi)}{4+\pi} = \frac{6}{4+\pi} = r \simeq 0{,}84$, es decir, el rectángulo de la ventana debe tener doble base ($2r$) que altura (r).

162. Considera la curva $y=\frac{1}{x}$. Demuestra que en cualquier punto, el segmento de recta tangente limitado por los ejes de coordenadas tiene como punto medio el punto de tangencia.

La recta tangente al punto $P\left(a, \frac{1}{a}\right)$ tiene ecuación $y-\frac{1}{a}=-\frac{1}{a^2}(x-a) \Rightarrow y=-\frac{1}{a^2}x+\frac{2}{a}$, que corta a los ejes de coordenadas en los puntos $A\left(0, \frac{2}{a}\right)$ y $B(2a, 0)$, con lo que el punto medio del segmento AB es $\left(\frac{0+2a}{2}, \frac{\frac{2}{a}+0}{2}\right)=\left(a, \frac{1}{a}\right)=P$, como queríamos demostrar.

163.* Entre 0 ºC y 30 ºC, el volumen *V* (en centímetros cúbicos) de *i* kg de agua a una temperatura *T* se expresa aproximadamente por la fórmula

$$V(T)=i\left(999{,}82-0{,}081654T+0{,}009591T^2-0{,}00007675T^3\right)$$

Encuentra la temperatura a la que el agua tiene densidad máxima.

Como $\text{densidad}=\frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$, queremos maximizar la función

$$d(T)=\frac{1}{999{,}82-0{,}081654T+0{,}009591T^2-0{,}00007675T^3}$$

en el intervalo [0, 30], o lo que es lo mismo, minimizar la función

$$f(T)=999{,}82-0{,}081654T+0{,}009591T^2-0{,}00007675T^3$$

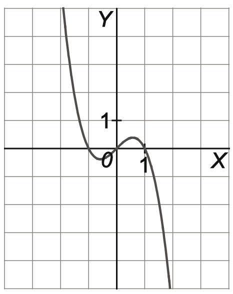
en dicho intervalo.

$f'(T)=-0{,}081654+2\cdot 0{,}009591T-3\cdot 0{,}00007675T^2=0$ tienecomo soluciones $T\simeq 78{,}81$ y $T\simeq 4{,}5$, el mínimo se alcanza en $T\simeq 4{,}5$ o en los extremos. Como $f(0)=999{,}82$; $f(30)=1003{,}9$ y $f(4{,}5)=999{,}64$ luego el mínimo se alcanza en T= 4,5 ºC, es decir, la máxima densidad del agua se da a 4,5 ºC.

PARA PROFUNDIZAR

164. Esboza la gráfica de la función $f(x)=x-x^3$ obteniendo previamente los elementos que consideres más significativos y encontrando la ecuación de la recta tangente en *P*(–1, 0).

Una segunda recta que pasa por *P* es también tangente a dicha curva en *Q*(*a*, *b*). Calcula la ecuación de esa recta.



Es una función polinómica, por tanto, su dominio es $\mathbb{R}$, es continua y no tiene asíntotas.

$f(x)=0 \Rightarrow x-x^3=0 \Rightarrow x(1+x)(1-x)=0 \Rightarrow x=0,\ x=-1,\ x=1$, por lo que la gráfica de f corta al eje de abscisas en los puntos (–1, 0), (0, 0) y (1, 0).

Estudiemos los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de f estudiando el signo de f':

$f'(x)=1-3x^2$ se anula si $x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ o $x=\frac{\sqrt{3}}{3}$; es negativa, f es decreciente, si $x\in\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ yes positiva, f es creciente, si $x\in\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$. Además, en el punto $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ hay un mínimo relativo y en $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{2\sqrt{3}}{9}\right)$ un máximo relativo.

Se estudiala curvatura y los puntos de inflexión de *f*a partir del signo de f'' :

$f''(x) = -6x$ se anula si $x = 0$; es negativa, *f* está por debajo de la tangente, si $x \in (0, +\infty)$ y es positiva, *f* está por encima de la tangente, si $x \in (-\infty, 0)$. Además, en el punto (0, 0) hay un punto de inflexión.

La tangente en el punto *P*(–1, 0) es $y - 0 = f'(-1)(x+1) \Rightarrow y = -2x - 2$.

La otra recta pedida también será de la forma $y - 0 = m(x+1) \Rightarrow y = mx + m$. Para que sea tangente a *f* en Q(*a*, *b*) se debe verificar que $x = a$ es solución doble de la ecuación $x - x^3 = m(x+1) \Rightarrow x^3 + (m-1)x + m = 0$.

Como $x = -1$ también es solución de esta ecuación, obtenemos $x^3 + (m-1)x + m = (x+1)(x^2 - x + m) = 0$ y $x = a$ debe ser solución doble de la ecuación $x^2 - x + m = 0$, con lo que su discriminante debe ser nulo, es decir, $1 - 4m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$ y, por tanto, la ecuación de la recta es $y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}$. Además, obtenemos que $a = \frac{1}{2}$ y $b = f(a) = \frac{3}{8}$, es decir, $Q\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{8}\right)$.

165. La ecuación de movimiento de un móvil viene dada por la función:

$$s(t) = Ae^{kt} + Be^{-kt} \text{ (} s \text{ en metros y } t \text{ en segundos)}$$

donde *A*, *B* y *k* son constantes. Demuestra que la aceleración es proporcional al espacio y calcula la constante de proporcionalidad.

La aceleración viene dada por la segunda derivada de la función de movimiento: $a(t) = s''(t)$.

$s'(t) = kAe^{kt} - kBe^{-kt} \Rightarrow s''(t) = k^2Ae^{kt} + k^2Be^{-kt} = k^2 s(t)$, así pues, $a(t)$ es proporcional a $s(t)$ con constante de proporcionalidad k^2 .

166. Un profesor un poco despistado propone a sus estudiantes que encuentren una función definida en el intervalo (0, 2) tal que:

$$f'(x) = 1, \text{ si } 0 < x \le 1 \quad f'(x) = 2, \text{ si } 1 < x < 2$$

y que además pase por el punto (1, 3). Los estudiantes intentan calcularla y se llevan una sorpresa. Intenta explicar qué es lo que ocurre.

La función debería ser $f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{si } 0 < x \le 1 \\ 2x+1 & \text{si } 1 < x < 2 \end{cases}$, pero esta función no es derivable en $x = 1$, ya que las derivadas laterales no coinciden.El profesor debería haber dicho $f'(x) = 1$ si $0 < x < 1$ y $f'(x) = 2$ si $1 < x < 2$.

167. Estudia si es posible encontrar valores para *a*, *b* y *c* de forma que la siguiente función sea derivable en todo $\mathbb{R}$.

$$f(x) = \begin{cases} x+4 & \text{si } x \le 1 \\ ax+b & \text{si } 1 < x \le 2 \\ ax^2 - c & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

Solo hay que estudiar qué ocurre en $x = 1$ y $x = 2$, en el resto del dominio la función es derivable.Para que *f* sea derivable en $x = 1$ y $x = 2$, una condición necesaria (no suficiente) es que sea continua en estos puntos, es decir, los límites laterales deben coincidir. Además, las derivadas laterales en estos puntos deben coincidir. Por tanto:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) \\ f'(1^-) = f'(1^+) \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) \\ f'(2^-) = f'(2^+) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 = a + b \\ 1 = a \\ 2a + b = 4a - c \\ a = 4a \end{cases} \Rightarrow \text{ No hay solución}$$

No hay valores de *a*, *b* y *c* que hagan que *f* sea derivable en $\mathbb{R}$.

168. Halla los dos puntos en los que la curva $y = x^4 - 2x^2 - x$ tiene la misma tangente.

Sean $A(a, f(a))$ y $B(b, f(b))$ los dos puntos de la curva con tangente común $y = mx + n$, entonces la ecuación $x^4 - 2x^2 - x = mx + n$ tiene dos soluciones dobles $x = a$ y $x = b$, es decir:

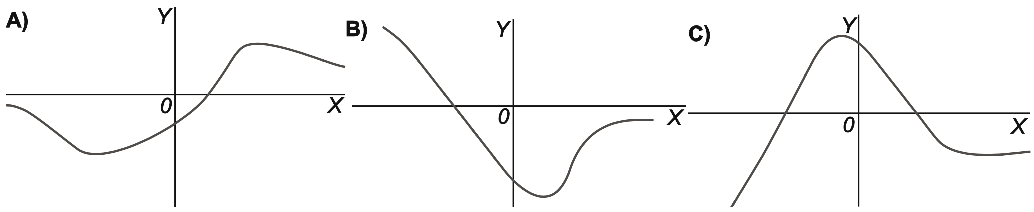
$$x^4 - 2x^2 - (1+m)x - n = (x-a)^2(x-b)^2 = x^4 - 2(a+b)x^3 + (a^2 + b^2 + 4ab)x^2 - 2ab(a+b)x + a^2b^2$$

Identificando coeficientes se obtiene:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a^2 + b^2 + 4ab = -2 \\ 2ab(a+b) = 1 + m \\ a^2b^2 = -n \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1,\ b = -1,\ m = -1,\ n = -1 \\ a = -1,\ b = 1,\ m = -1,\ n = -1 \end{cases}$$

Por tanto, la tangente común es $y = -x - 1$ y los puntos de tangencia son $A(-1, 0)$ y $B(1, -2)$.

169. Las gráficas *A*, *B* y *C* representan a una función *f*, a su derivada f' y a otra función *F* tal que $F' = f$. Asocia cada gráfica a *f*, f' y *F*.



Analizando el crecimiento y decrecimiento de cada gráfica y sus extremos relativos se concluye que la gráfica de *F* es la representada en B, la gráfica de *f* es la representada en A y la gráfica de f' la representada en C.

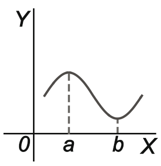
170. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función derivable, y *a* y *b*, dos soluciones de la ecuación $f'(x) = 0$ tales que entre ellas no hay ninguna otra solución de esa ecuación. Razona si puede ocurrir cada una de las siguientes posibilidades para la ecuación $f(x) = 0$.

a) Entre *a* y *b* no tiene ninguna solución.

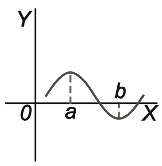
b) Entre *a* y *b* tiene una única solución.

c) Entre *a* y *b* tiene dos o más soluciones.

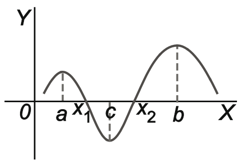
a) Es posible



b) Es posible



c) No es posible, ya que entre dos soluciones x_1 y x_2 de $f(x) = 0$ existiría algún valor $x = c$ en el que habría un máximo o mínimo relativo, con lo que $f'(c) = 0$

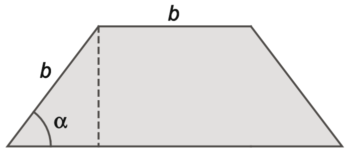


171. Calcula $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}\left(\sqrt{\pi} + t\right)^2 - \operatorname{sen}\pi}{t}$.

Nota: Aplica la definición de derivada en un punto de una determinada función.

Consideremos la función $f(x) = \operatorname{sen} x^2$, su derivada en el punto $x = \sqrt{\pi}$ es precisamente el límite que nos piden calcular, por tanto, como $f'(x) = 2x \cos x^2$, el límite pedido es $2\sqrt{\pi}\cos\pi = -2\sqrt{\pi}$.

172. De todos los trapecios que tienen tres lados iguales, encuentra aquel que tiene área máxima. (Ayuda: toma como variable el ángulo que forma la base mayor con uno de los lados oblicuos.)



Obtengamos el área en función del ángulo α. Llamando *b* a la longitud de cada uno de los tres lados iguales, la altura de dicho trapecio es $b\,\text{sen}\,\alpha$ y la base mayor es $b+2b\cos\alpha$.

El área del trapecio es $A(\alpha)=\dfrac{(b+2b\cos\alpha+b)\,b\,\text{sen}\,\alpha}{2}=b^2(1+\cos\alpha)\,\text{sen}\,\alpha=$

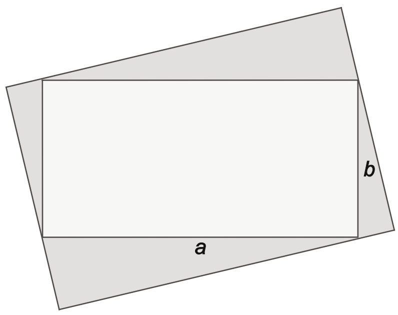
$=b^2(\text{sen}\,\alpha+\text{sen}\,\alpha\cos\alpha)=b^2\left(\text{sen}\,\alpha+\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right)$, función que depende solo de α, ya que suponemos *b* fijado.

Por tanto, queremos maximizar $A(\alpha)=b^2\left(\text{sen}\,\alpha+\dfrac{\text{sen}\,2\alpha}{2}\right)$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

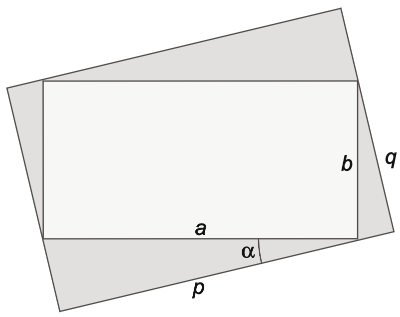
$A'(\alpha)=b^2(\cos\alpha+\cos 2\alpha)=0\Rightarrow\cos\alpha=-\cos 2\alpha\Rightarrow\alpha+2\alpha=\pi\Rightarrow\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, que pertenece al intervalo $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$A(0)=0$, $A\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{3\sqrt{3}}{4}b^2$ y $A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=b^2$, por tanto, el área máxima se obtiene cuando $\alpha=\dfrac{\pi}{3}$, es decir, cuando el trapecio es la mitad de un hexágono regular.

173. Un rectángulo de dimensiones *a* y *b* se inscribe en otro como indica la figura. Halla las dimensiones de este último para que su área sea máxima.



Calculemos las dimensiones del rectángulo exterior en función de los números fijos *a* y *b* y del ángulo variable α. Tenemos $p=a\cos\alpha+b\,\text{sen}\alpha$ y $q=b\cos\alpha+a\,\text{sen}\alpha$, con lo que queremos maximizar la función $A(\alpha)=(a\cos\alpha+b\,\text{sen}\alpha)(b\cos\alpha+a\,\text{sen}\alpha)=ab+\left(a^2+b^2\right)\text{sen}\,\alpha\cos\alpha=$



$=ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}\text{sen}2\alpha$ en el intervalo $\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right]$.

$A(0)=A\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=ab$ y $A\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=ab+\dfrac{a^2+b^2}{2}=\dfrac{(a+b)^2}{2}$, por tanto, el rectángulo exterior de área máxima se alcanza cuando $\alpha=\dfrac{\pi}{4}$, es decir, cuando el rectángulo exterior es un cuadrado de lado $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(a+b)$.

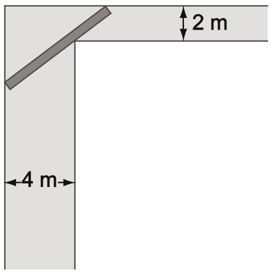
174. Observa que si *f* es derivable y corta en dos puntos el eje horizontal, es seguro que entre ellos va a haber algún valor que anule la derivada. Partiendo de este hecho, demuestra que la función $f(x) = x^2 - x\,\text{sen}\,x - \cos x$ solo corta dos veces el eje horizontal.

La derivada $f'(x) = 2x - \text{sen}\,x - x\cos x + \text{sen}\,x = x(2-\cos x)$ solo se anula si $x = 0$, por tanto, la gráfica de *f* corta al eje horizontal como máximo dos veces.

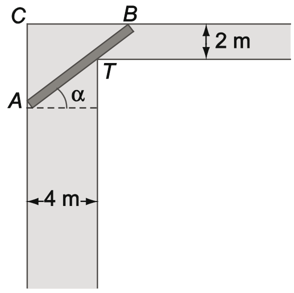
Por otra parte, como *f* es continua, $f(-\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, $f(0) = -1 < 0$ y $f(\pi) = \pi^2 + 1 > 0$, la gráfica de *f* corta al eje horizontal al menos una vez en el intervalo $(-\pi, 0)$ y al menos otra en el intervalo $(0, \pi)$.

De este modo, la gráfica de *f* corta al eje horizontal exactamente dos veces.

175. Un túnel en forma de codo está formado por dos pasillos perpendiculares de anchuras 2 y 4 metros. ¿Cuál es la longitud máxima que puede tener un listón de madera para pasarlo horizontalmente a través del túnel?



Sea α el ángulo que forma con *AC* el listón más corto de los que no pueden pasar horizontalmente por el codo.



Tenemos $AB = AT + TB = \dfrac{4}{\cos\alpha} + \dfrac{2}{\text{sen}\,\alpha}$, por tanto, queremos minimizar la función $f(\alpha) = \dfrac{4}{\cos\alpha} + \dfrac{2}{\text{sen}\,\alpha}$ en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$.

$f'(\alpha) = \dfrac{4\,\text{sen}\,\alpha}{\cos^2\alpha} - \dfrac{2\cos\alpha}{\text{sen}^2\,\alpha} = 0 \Rightarrow \text{tg}^3\,\alpha = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \text{tg}\,\alpha = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, siendo la única solución en el intervalo $\left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$ el valor $\alpha_0 \simeq 0{,}671$ rad.

$\lim\limits_{\alpha\to 0^+} f(\alpha) = \lim\limits_{\alpha\to \frac{\pi}{2}^-} f(\alpha) = +\infty$ y $f(\alpha_0) \simeq 8{,}32$, por tanto, el listón más corto que no pasa por el codo del pasillo mide 8,32 metros, siendo esta longitud la máxima posible para un que un listón pase el codo.

176. Definamos la función *f* como:

$$f(x) = \begin{cases} x^2\,\text{sen}\,\dfrac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Calcula $f'(0)$. ¿Es continua la función $f'(x)$ en $x = 0$?

$f'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} h\,\text{sen}\dfrac{1}{h} = 0$, pues $\text{sen}\dfrac{1}{h}$ es acotada y $\lim\limits_{h\to 0} h = 0$.

Si $x \neq 0$ tenemos $f'(x) = 2x\,\text{sen}\dfrac{1}{x} + x^2\cos\dfrac{1}{x}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 2x\,\text{sen}\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x}$, con lo que $\lim\limits_{x\to 0} f'(x)$ no existe, ya que $\lim\limits_{x\to 0} 2x\,\text{sen}\dfrac{1}{x} = 0$ pero $\lim\limits_{x\to 0}\cos\dfrac{1}{x}$ no existe. Por tanto, $f'(x)$ no es continua en $x = 0$.

ENTORNO MATEMÁTICO

¡Fuego!

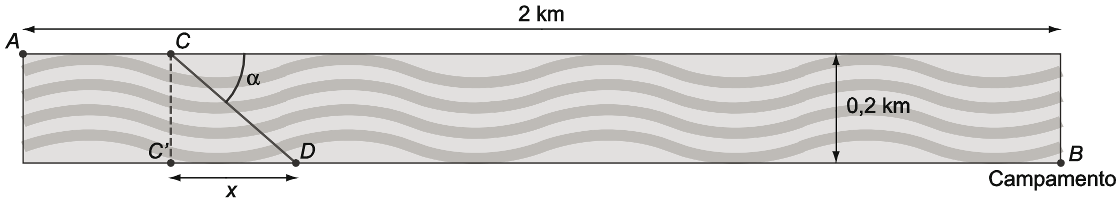
Lucía, Fernando, Montse, Dimitri y Teófilo "el cenizo", como le llaman sus amigos, han salido de excursión y se han instalado en un refugio a la orilla de un río de 200 m de ancho.

El día es particularmente caluroso, por lo que han decidido salir a dar un paseo y bañarse antes de comer. Tras seguir la orilla en línea recta cerca de 2 km andando, deciden meterse en el agua y cruzar a nado hacia la orilla contraria. Eso sí, la decisión cuenta con el voto en contra de Teófilo que advierte "seguro que si cruzamos nos pasa algo".

Una vez en la orilla Montse dice de pronto: "algo se está chamuscando en la casa" y, en efecto, ven como desde la zona en la que se encuentra el refugio sale una columna de humo denso y negro.

Pretenden llegar lo antes posible para sofocarlo y no tener que dormir al raso. Sabiendo que aproximadamente pueden nadar a 4 km/h y correr a 10 km/h, ¿qué trayectoria deben seguir en su carrera para salvar su refugio?

Observemos el siguiente esquema de la situación.



Independientemente del punto C por donde deciden atravesar el río, para nadar hasta D, los amigos corren $2 - C'D = 2 - x$ km y nadan $CD = \sqrt{0,2^2 + x^2} = \sqrt{0,04 + x^2}$ km, por tanto, tardarán $\frac{2-x}{10} + \frac{\sqrt{0,04+x^2}}{4}$ horas en regresar al campamento.

Así pues, queremos minimizar la función $f(x) = \frac{2-x}{10} + \frac{\sqrt{0,04+x^2}}{4}$ en el intervalo $[0,\ 2]$.

Derivando tenemos:

$$f'(x) = -\frac{1}{10} + \frac{2x}{8\sqrt{0,04+x^2}} = 0 \Rightarrow \sqrt{0,04+x^2} = 2,5x \Rightarrow 5,25x^2 = 0,04 \Rightarrow x^2 = \frac{0,04}{5,25} = \frac{4}{525},$$

cuya única solución en el intervalo (0, 2) es $x = \frac{2}{5\sqrt{21}} = \frac{2\sqrt{21}}{105} \simeq 0,087$.

Como $f(0) = 0,25$, $f(2) \simeq 0,502$ y $f\left(\frac{2\sqrt{21}}{105}\right) \simeq 0,246$, los amigos deben atravesar el río de modo que salgan del mismo 87 metros más cerca del campamento y, de este modo, llegaran al campamento en el menor tiempo posible, aproximadamente 0,246 h = 14,76 minutos.

Puesto que el punto donde comienzan a nadar no influye, podrían empezar atravesando el río para salir 87 m más cerca del campamento y luego correr hasta el mismo, o bien correr 2 □0,087 =1,913 km y atravesar el río para salir del mismo ya en el campamento.

Si deseamos dar la solución calculando el ángulo α respecto a la orilla con el que deben atravesar el río, tenemos $\operatorname{tg}\alpha = \frac{0,2}{0,087} \Rightarrow \alpha \simeq 66,5^\circ$.

Auxilio marítimo

A Miguel no le gusta nada el mar y este verano, en el colmo del fastidio, sus padres han decidido alquilar un velero para navegar alrededor de las Canarias. Ya llevan dos días en el barco y mientras sus hermanos Iván y Raquel no paran de bañarse y ayudar a sus padres, él no hace otra cosa que contar el número de veces que ha vomitado. Decide ir a la nevera a comer algo y cuando entra en la cocina nota que sus pies chapotean en el agua. Antes de dar la voz de alarma piensa: "lo que me faltaba, ahora tendré que ponerme el salvavidas y echarme al agua".

Al oír la alerta su padre conecta la radio para enviar la señal de socorro. Si el velero viaja hacia el oeste con una velocidad de 15 km/h, la radio tiene un alcance de 92 km y el tiempo estimado para el hundimiento es de 2 horas, ¿podrá recibirla antes de que se hunda el barco, un crucero que se encuentra a 100 km de distancia en dirección oeste y viaja hacia el norte con una velocidad de 30 km/h?

Consideremos un sistema de coordenadas donde el origen sea la posición original del velero, la dirección Oeste – Este sea el eje*X* y la dirección Sur – Norte el eje *Y*.

Así, al principio tenemos situado al velero en el punto *V*(0, 0) y al crucero en el punto *C*(□100, 0). Trascurridas *t* horas, el velero estará en el punto $V'(-15t, 0)$ y el crucero en el punto $C(-100, 30t)$, por lo que la distancia, en km, entre las embarcaciones viene dada por la función $d(t)=\sqrt{(30t)^2+(15t-100)^2}=5\sqrt{45t^2-120t+400}$.

Calculemos el mínimo de esta función en el intervalo [0, 2]:

$$d'(t)=\frac{5(90t-120)}{2\sqrt{45t^2-120t+400}}=0\Rightarrow t=\frac{120}{90}=\frac{4}{3}$$, que pertenece al intervalo [0, 2].

$d(0)=5\sqrt{400}=100$, $d\left(\frac{4}{3}\right)=5\sqrt{320}\simeq 89,44$ y $d(2)=5\sqrt{340}\simeq 92,2$

Por tanto, la distancia mínima entre el velero y el crucero se da pasadas 1 hora y 20 mintuos, y es de 89,44 km, por lo que la señal de socorro se recibirá a tiempo (seguramente antes del tiempo calculado).

Si deseamos calcular el momento en que se recibirá en el crucero la señal de socorro, observemos que esto sucede en el primer instante en que $d(t)=92$, resolviendo esta ecuación tenemos:

$$d(t)=92\Rightarrow 5\sqrt{45t^2-120t+400}=92\Rightarrow 25\left(45t^2-120t+400\right)=8464\Rightarrow 375t^2-1000t+512=0,$$

cuyas soluciones son $t=\frac{100-4\sqrt{145}}{75}\simeq 0,69$ y $t=\frac{100+4\sqrt{145}}{75}\simeq 1,98$.

Por tanto, el crucero recibe la señal trascurridas 0,69 h.

AUTOEVALUACIÓN

Comprueba qué has aprendido

1. **Calcula los puntos de corte con los ejes de la tangente a la curva $y=\frac{1}{x-1}$ en el punto *P*(2, 1). Si *A* y *B* son dichos puntos, ¿qué relación hay entre las longitudes de los segmento *AP* y *PB*?**

Si $f(x)=\frac{1}{x-1}$, la tangente es *P* es $y-1=f'(2)(x-2)$. Como $f'(x)=-\frac{1}{(x-1)^2}$, la tangente en *P* es $y-1=-(x-2)\Rightarrow y=-x+3$, que corta a los ejes en los puntos *A*(0, 3) y *B*(3, 0), por tanto, $AP=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ y $PB=\sqrt{2}$, es decir, *AP* es el doble de *PB*.

2. **Si $h(x)=\sqrt{4+3f(x)}$ con $f(1)=7$ y $f'(1)=4$, calcula $h'(1)$.**

$$h'(x)=\frac{3f'(x)}{2\sqrt{4+3f(x)}}\Rightarrow h'(1)=\frac{3f'(1)}{2\sqrt{4+3f(1)}}=\frac{6}{5}$$

3. ¿Para qué valores de r la función $y = e^{rx}$ satisface la ecuación $y'' + 5y' - 6y = 0$?

$y = e^{rx} \Rightarrow y' = re^{rx} \Rightarrow y'' = r^2 e^{rx}$

$y'' + 5y' - 6y = 0 \Rightarrow \left(r^2 + 5r - 6\right)e^{rx} = 0 \Rightarrow r^2 + 5r - 6 = 0 \Rightarrow r = 1,\ r = -6$

4. Calcula la ecuación de la tangente a la curva $y = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ en el punto de ordenada 1.

El punto de ordenada 1 verifica $\dfrac{2}{1+e^{-x}} = 1 \Rightarrow e^{-x} = 1 \Rightarrow x = 0$

Así, si $f(x) = \dfrac{2}{1+e^{-x}}$ tenemos que la ecuación de la recta tangente buscada es $y - 1 = f'(0)(x-0)$, con $f'(x) = \dfrac{2e^{-x}}{\left(1+e^{-x}\right)^2}$, es decir, la recta tangente es $y - 1 = \dfrac{1}{2}x \Rightarrow y = \dfrac{1}{2}x + 1$.

5. ¿Qué relación existe entre las derivadas de las funciones $f(x) = \cos^2 x$ y $g(x) = \operatorname{sen}^2 x$?

Como $g(x) + f(x) = \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, derivando obtenemos $g'(x) + f'(x) = 0 \Rightarrow g'(x) = -f'(x)$.

Idéntico resultado obtenemos si derivamos directamente *f* y *g*, ya que $f'(x) = -2\cos x \operatorname{sen} x$ y $g'(x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$.

6. Encuentra todos los puntos del intervalo $[0, 2\pi]$ en los que la gráfica de la función $f(x) = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x$ tiene tangente horizontal.

$f'(x) = 2\cos x + 2\operatorname{sen} x \cos x = 2\cos x(1 + \operatorname{sen} x)$

Las soluciones de $f'(x) = 0$ en el intervalo $[0, 2\pi]$ son $x = \dfrac{\pi}{2}$ y $x = \dfrac{3\pi}{2}$, siendo estos los puntos con tangente horizontal en dicho intervalo.

7. Indica en qué puntos del intervalo $[0, 2\pi]$ es la siguiente función creciente.

$$f(x) = x - 2\operatorname{sen} x$$

Estudiemos el signo de f' en el intervalo $[0, 2\pi]$.

En dicho intervalo $f'(x) = 1 - 2\cos x$ se anula si $x = \dfrac{\pi}{3}$ o $x = \dfrac{5\pi}{3}$, es positiva si $x \in \left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ y negativa si $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

Por tanto, *f* es creciente en $\left(\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right)$ y decreciente en $\left[0, \dfrac{\pi}{3}\right) \cup \left(\dfrac{5\pi}{3}, 2\pi\right]$.

8. ¿En qué intervalo es cóncava hacia abajo la curva $y = e^{-x^2}$?

$$y = e^{-x^2} \Rightarrow y' = -2xe^{-x^2} \Rightarrow y'' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\left(2x^2 - 1\right) = 4e^{-x^2}\left(x + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

y''' se anula si $x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ o $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$, es positiva si $x \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cup \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$ y negativa si $x \in \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

Por tanto, la curva es cóncava hacia abajo en el intervalo $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

9. ¿Cuántos puntos de inflexión tiene la gráfica de una función polinómica de 3.er grado?

Al tratarse de una función polinómica de 3.er grado, su derivada será una función polinómica de 1.er grado, por lo que la ecuación $f''(x) = 0$ siempre tendrá una única solución en la que cambia el signo de f'', de donde sigue que siempre tendrá un único punto de inflexión.

10. Determina los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función $f(x) = \ln\sqrt{x^3 + 1}$.

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^3+1}} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}} = \frac{3x^2}{2x^3+2} \text{ y } f''(x) = \frac{6x\left(2x^3+2\right) - 3x^2 \cdot 6x^2}{\left(2x^3+2\right)^2} = \frac{-6x^4 + 12x}{\left(2x^3+2\right)^2}$$

f' se anula si $x = 0$, pero no cambia de signo al pasar por este punto, f' es positiva tanto a su derecha como a la izquierda de $x = 0$, por lo que no existen extremos relativos.

f'' se anula si $-6x^4 + 12x = 0 \Rightarrow -6x\left(x^3 - 2\right) = 0 \Rightarrow x = 0,\ x = \sqrt[3]{2}$. Como cambia de signo al pasar por estos puntos, ya que pasa de negativa a positiva al pasar por $x = 0$, y de positiva a negativa, al pasar por $x = \sqrt[3]{2}$, tenemos puntos de inflexión en los puntos $A(0, 0)$ y $B\left(\sqrt[3]{2}, \ln\sqrt{3}\right)$.

Relaciona y contesta

Elige la única respuesta correcta en cada caso

1. La función $f(x) = x^3 + ax^2 + 3x + 1$ es creciente en $\mathbb{R}$ …

A. … para cualquier valor de *a*.

b) … siempre que $a > 3$.

C. … solo si $a = 4$.

D. … solo si $-3 \le a \le 3$.

Si f es creciente en $\mathbb{R}$ entonces $f'(x) = 3x^2 + 2ax + 3 \ge 0$ para todo número real x, es decir, la parábola $y = 3x^2 + 2ax + 3$ no puede cortar dos veces al eje de abscisas, con lo que el discriminante de la ecuación $3x^2 + 2ax + 3 = 0$ es menor o igual a 0.

Por tanto, $4a^2 - 36 \le 0 \Rightarrow a^2 \le 9 \Rightarrow -3 \le a \le 3$, la respuesta D.

2. Una recta tangente a lacurva $y = -x^3 + 26x$ es:

A. $y = -27$ **B.** $x - y - 54 = 0$ **C.** $x + y - 54 = 0$ **D.** $x - y - 48 = 0$

Si $f(x) = -x^3 + 26x$ entonces $f'(x) = -3x^2 + 26$.

Observemos las pendientes de las rectas dadas para comprobar la veracidad de cada respuesta.

Si la respuesta correcta es A, cuya pendiente es 0, la abscisa del punto de tangencia verificaría $f'(x) = 0$, es decir:

$$-3x^2 + 26 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{26}{3} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{26}{3}},\ x = \sqrt{\frac{26}{3}},$$

Pero en ninguno de estos puntos la recta tangente coincide con la dada en A.

Si la respuesta correcta es B o D, cuyas pendientes son 1, la abscisa del punto de tangencia verificaría $f'(x) = 1$, es decir:

$$-3x^2 + 26 = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{25}{3} \Rightarrow x = -\sqrt{\frac{25}{3}} = -\frac{5\sqrt{3}}{3},\ x = \sqrt{\frac{25}{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3},$$

Pero en ninguno de estos puntos la recta tangente coincide con la dadas en B o D.

Si la respuesta correcta es C, cuya pendienteses –1, la abscisa del punto de tangencia verificaría $f'(x) = -1$, es decir:

$$-3x^2 + 26 = -1 \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = -3,\ x = 3.$$

En el primer caso la recta tangente no coincide con la dada en C, pero sí en el segundo caso, la recta tangente en $x = 3$ coincide con la dada en C, por tanto, la respuesta correcta es C.

3. Si la cúbica $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ tiene su punto de inflexión en (3, –2) y un extremo relativo en (5, 1), el otro extremo relativo se alcanza en:

A. (1, –5) **B.** (–5, –1) **C.** (7, 4) **D.** (8, –1)

Toda cúbica es simétrica respecto de su punto de inflexión, por tanto, el otro extremo relativo es el simétrico del punto (5, 1) respecto de (3, –2), es decir, la respuesta A.

Para demostrar nuestra afirmación observemos que si $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ es una función cúbica, tenemos $f''(x) = 6ax + 2b$, por lo que el punto de inflexión tiene abscisa $x = -\frac{b}{3a}$ y basta comprobar que $f\left(-\frac{b}{3a} - x\right) = f\left(-\frac{b}{3a} + x\right)$ para cualquier valor *x*.

Alternativamente, podríamos haber resuelto el sistema lineal:

$$\begin{cases} f(3) = -2 \\ f(5) = 1 \\ f'(3) = 0 \\ f''(5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27a + 9b + 3c + d = -2 \\ 125a + 25b + 5c + d = 1 \\ 27a + 6b + c = 0 \\ 30a + 2b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{3}{16},\ b = \frac{45}{16},\ c = -\frac{189}{16},\ d = \frac{211}{16}$$

y, sabiendo que $x = 5$ es solución de la ecuación de segundo grado $f'(x) = 0$, encontrar la otra solución, obteniéndose $x = 1$.

Señala, en cada caso, las respuestas correctas

4. **Sea *f* la función definida en $(-\infty, 1]$ por $f(x) = 2x\sqrt{1-x}$ y *T* la tangente a la gráfica de *f* en el punto de abscisa $x = 0$, entonces:**

A. Si $x < 1$, $f'(x) = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$

B. Si $x < 1$, $f(x) \le \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$

C. La recta *T* viene dada por $y = 2x$.

D. La gráfica de *f* verifica que a veces está por encima y a veces está por debajo de *T*.

$f'(x) = 2\sqrt{1-x} + 2x\dfrac{-1}{2\sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1-x} - \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-2x-x}{\sqrt{1-x}} = \dfrac{2-3x}{\sqrt{1-x}}$ si $x < 1$, por lo que A es correcta.

Para comprobar B calculamos el valor del máximo absoluto de $f: f'(x) = 0 \Rightarrow 2-3x = 0 \Rightarrow x = \dfrac{2}{3}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$, $f\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4\sqrt{3}}{9}$ y $f(1) = 0$, por tanto, el valor máximo de *f* es $\dfrac{4\sqrt{3}}{9}$, por lo que B es correcta.

La ecuación de *T* es $y - f(0) = f'(0)(x-0) \Rightarrow y = 2x$, por lo que C también es correcta.

Por último, para comprobar D, observemos que:

Si $0 \le x \le 1$ tenemos $\sqrt{1-x} \le 1 \Rightarrow 2x\sqrt{1-x} \le 2x$

Si $x < 0$ tenemos $\sqrt{1-x} \ge 1 \Rightarrow 2x\sqrt{1-x} \le 2x$

Por tanto, la gráfica de *f* nunca está por encima de *T*, por lo que D es incorrecta.

5. **Si $f(x) = e^{\operatorname{sen} x}$, entonces:**

A. $f(0) = 1$

B. $f'(0) = 1$

C. $f''(0) = 1$

D. La gráfica de *f* no tiene punto de inflexión en $\left[\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$

$f'(x) = e^{\operatorname{sen} x}\cos x \Rightarrow f''(x) = e^{\operatorname{sen} x}\cdot\cos^2 x - e^{\operatorname{sen} x}\cdot\operatorname{sen} x = e^{\operatorname{sen} x}\left(\cos^2 x - \operatorname{sen} x\right) = -e^{\operatorname{sen} x}\left(\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1\right)$

$f(0) = 1$, por lo que A es correcta. $f'(0) = 1$, por lo que B es correcta. $f''(0) = 1$, por lo que C es correcta.

Para verificar D observemos que f'' se anula si $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ (la otra solución no es posible, ya que $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1$).

Esta ecuación tiene una solución $x_0 = \operatorname{arcsen}\left(\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ en el intervalo $\left[\dfrac{\pi}{4}, 2\pi\right]$, de hecho, x_0 es un ángulo entre $\dfrac{3\pi}{4}$ y π, además,

si $\dfrac{\pi}{4} \le x < x_0$ tenemos $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 < 0 \Rightarrow f''(x) > 0$

si $x_0 < x \le 2\pi$ tenemos $\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen} x - 1 > 0 \Rightarrow f''(x) < 0$

por lo que tenemos un punto de inflexión en $x = x_0$ y D es incorrecta.

6. **Sea f una función, definida en todo $\mathbb{R}$, que admite segunda derivada; L su gráfica; T_1 la recta de ecuación $y = x + 1$; T_2 la recta de ecuación $y = 1 - x$. Entonces:**

A. Si T_1 es tangente a L en el punto de abscisa $x = 1$, entonces $f'(1) = 1$.

B. Si T_1 es tangente a L en el punto de abscisa $x = 1$, entonces $f(1) = 1$.

C. Si T_1 es tangente a L en el punto de abscisa $x = 1$ y T_2 es tangente a L en el punto de abscisa $x = 3$, entonces existe $a \in (1, 3)$ tal que $f'(a) = 0$.

D. Si T_1 es tangente a L en el punto de abscisa $x = 1$ y T_2 es tangente a L en el punto de abscisa $x = 3$, entonces f admite un máximo relativo en un punto $b \in [1, 3]$.

A es correcta, ya que la pendiente de T_1 es 1.

B es incorrecta, ya que la ordenada de T_1 en $x = 1$ es $y = 2$, así que $f(1) = 2$.

C nos dice que $f'(1) = 1$ y $f'(3) = -1$, con lo que, al ser f' continua (existe $a \in (1, 3)$ tal que $f'(a) = 0$), C es correcta.

D nos dice que $f'(1) = 1$ y $f'(3) = -1$, y como $\exists f'' \Rightarrow f'$ es continua. Como $f'(a) = 0$ y f pasa de creciente a decreciente en algún punto $a \in (1, 3)$. D es correcta.

Elige la relación correcta entre las dos afirmaciones dadas

7. **Supón que f es una función derivable en $\mathbb{R}$. Considera las dos afirmaciones siguientes:**

1. $f'(2) = 0$, $f''(2) \geq 0$

2. **f presenta un máximo relativo en $x = 2$.**

A. $1 \Rightarrow 2$ pero $2 \not\Rightarrow 1$

B. $2 \Rightarrow 1$ pero $1 \not\Rightarrow 2$

C. 1 y 2 se excluyen entre sí

D. Nada de lo anterior

$1 \not\Rightarrow 2$, ya que podría ocurrir que $f'(2) = 0$, $f''(2) > 0$, con lo que en $x = 2$ habría un mínimo relativo. $2 \not\Rightarrow 1$, ya que si en $x = 2$ hay un máximo relativo, $f'(2) = 0$ pero podría ser $f''(2) < 0$, como sucede, por ejemplo, si $f(x) = -(x-2)^2$. Por tanto, ni A ni B son correctas.

Tampoco es correcta C, por ejemplo, si $f(x) = -(x-2)^4$ se verifican 1 y 2.

Así, la relación correcta es D.