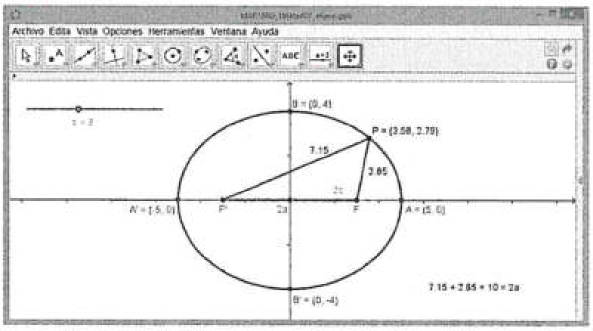
Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Elipse (página 183)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una elipse. Moviendo el punto P se puede comprobar la propiedad de la elipse como el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias es constante. El deslizador de color verde permite modificar la longitud del eje focal para ver otras elipses y comprobar la misma propiedad con ellas.



Hipérbola (página 187)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una hipérbola. Moviendo el punto P se puede comprobar la propiedad de la hipérbola como el lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias es constante. El deslizador de color verde permite modificar la longitud del eje focal para ver otras hipérbolas y comprobar la misma propiedad con ellas.

Parábola (página 193)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una parábola. Moviendo el punto P se puede comprobar la propiedad de la parábola como el lugar geométrico de los puntos que equidistan de una recta y de un punto. El deslizador de color verde permite modificar el parámetro p para ver otras parábolas y comprobar la misma propiedad con ellas.

Actividades (páginas 179/194)

1 Halla la mediatriz del segmento cuyos extremos son los puntos $A(1, -1)$ y $B(-3, 4)$.

$\sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = \sqrt{(x+3)^2 + (y-4)^2}$

$\Rightarrow -8x + 10y - 23 = 0$

2 Calcula la bisectriz del ángulo formado por las rectas $r: 3x - 4y + 10 = 0$ y $s: 5x + 12y - 2 = 0$.

$$\frac{3x - 4y + 10}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \pm\frac{5x + 12y - 2}{\sqrt{5^2 + 12^2}}$$

$\Rightarrow 13(3x - 4y + 10) = \pm 5(5x + 12y - 2)$

Las ecuaciones de las bisectrices son:

$$x - 8y + 10 = 0 \text{ y } 8x + y + 15 = 0$$

3 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al origen es el triple que la distancia a la recta $6x - y + 4 = 0$.

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \pm 3 \cdot \frac{6x - y + 4}{\sqrt{6^2 + (-1)^2}}$$

$\Rightarrow 287x^2 - 28y^2 + 432x - 72y - 108xy + 144 = 0$

4 Dada la recta de ecuación $r: 7x + 2y - 4 = 0$ y el punto $P(-3, 2)$, determina las coordenadas de un punto Q sabiendo que la recta r es la mediatriz del segmento PQ.

El segmento PQ, debe ser perpendicular a la recta r, por tanto $PQ = k(7, 2)$. Además, $d(P, r) = d(Q, r)$.

Sean (a, b) las coordenadas del punto Q, $Q(a, b)$:

$$(a + 3, b - 2) = k(7, 2) \Rightarrow \begin{cases} a = 7k - 3 \\ b = 2k + 2 \end{cases}$$

$$d(P, r) = \frac{|7\cdot(-3) + 2 \cdot 2 - 4|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2}} = \frac{21}{\sqrt{53}}$$

$$d(Q, r) = \frac{|7\cdot a + 2 \cdot b - 4|}{\sqrt{7^2 + (-2)^2}} = \frac{7a + 2b - 4}{\sqrt{53}}$$

Así, $7a + 2b - 4 = 21$

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} a = 7k - 3 \\ b = 2k + 2 \\ 7a + 2b = 25 \end{cases}$$

Se obtiene: $k = \frac{42}{53}$; $a = \frac{135}{53}$ y $b = \frac{190}{53}$

Las coordenadas de Q son: $Q\left(\frac{135}{53}, \frac{190}{53}\right)$

5 Sabiendo que el punto de intersección de dos rectas r y s es $P(9, -2)$ y una de sus bisectrices es la recta de ecuación $2x + 5y - 8 = 0$, halla la ecuación de la otra bisectriz.

La otra bisectriz será perpendicular a la conocida, por tanto su ecuación será de la forma $5x - 2y + C = 0$, sustituyendo el punto $P(9, -2)$, tenemos:

$5 \cdot 9 - 2 \cdot (-2) + C = 0 \rightarrow C = -49$, la ecuación pedida es $5x - 2y - 49 = 0$.

6 Determina la ecuación que cumplen los puntos del plano cuya distancia a $P(-3, 5)$ es 4.

$\sqrt{(x+3)^2 + (y-5)^2} = 4$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 10y + 25 = 16$

$\Rightarrow x^2 + y^2 + 6x - 10y + 18 = 0$

7 Calcula la ecuación de una circunferencia de centro $C(-1, 5)$ y radio 7.

$(x + 1)^2 + (y - 5)^2 = 49 \Rightarrow x^2 + y^2 + 2x - 10y - 23 = 0$

8 Calcula las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia cuya ecuación es: $x^2 + y^2 - 4x + 8y - 16 = 0$

$m = -2a \Rightarrow -4 = -2a \Rightarrow a = 2$

$n = -2b \Rightarrow 8 = -2b \Rightarrow b = -4$

$p = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow -16 = 4 + 16 - R^2 \Rightarrow R = 6$

Así, $C(2, -4)$ y $R = 6$.

9 Dada la circunferencia $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 47 = 0$, calcula la ecuación de otra concéntrica con respecto a ella que:

a) **Tenga radio 2.** ***b)*** **Pase por el punto $(5, -7)$.**

a) $m = -2a \Rightarrow -10 = -2a \Rightarrow a = 5$

$n = -2b \Rightarrow 6 = -2b \Rightarrow b = -3$

$p = a^2 + b^2 - R^2 \Rightarrow p = 25 + 9 - 4 = 30 \Rightarrow R = 6$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$$

b) La ecuación será de la forma: $x^2 + y^2 - 10x + 6y + p = 0$, imponemos que la circunferencia pase por el punto $(5, -7)$ y tenemos: $25 + 49 - 50 - 42 + p = 0 \Rightarrow p = 18$

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2 + y^2 - 10x + 6y + 18 = 0$$

10 **Calcula las coordenadas del centro y el radio de la circunferencia de ecuación $4x^2 + 4y^2 - 10x + 5y - 1 = 0$.**

En primer lugar se debe dividir toda la ecuación entre 4:

$$x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x + \frac{5}{4}y - \frac{1}{4} = 0$$

$$m = -2a \Rightarrow -\frac{5}{2} = -2a \Rightarrow a = \frac{5}{4}$$

$$n = -2b \Rightarrow \frac{5}{4} = -2b \Rightarrow b = -\frac{5}{8}$$

$$\frac{1}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(-\frac{5}{8}\right)^2 - R^2 \Rightarrow R = \frac{\sqrt{141}}{8}$$

Por tanto: $C\left(\frac{5}{4}, -\frac{5}{8}\right)$ y $R = \frac{\sqrt{141}}{8}$

11 **Calcula la ecuación de una circunferencia cuyo centro esté sobre el eje de abscisas, y la de una circunferencia que tenga su centro sobre el eje de ordenadas.**

Si la circunferencia tiene su centro sobre el eje de abscisas las coordenadas de este serán de la forma $C(a, 0)$ y su ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2ax + a^2 - R^2 = 0$$

Si la circunferencia tiene su centro sobre el eje de ordenadas las coordenadas de dicho centro serán de la forma $C(0, b)$ y su ecuación:

$$x^2 + y^2 - 2by + b^2 - R^2 = 0$$

12 **Calcula la ecuación de una elipse centrada en el origen, de semieje mayor 10 y distancia focal 12.**

Sabemos que en una elipse se cumple:

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 100 = b^2 + 36 \Rightarrow b = 8$$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

13 **Calcula la ecuación de una elipse de excentricidad 0,4 y semidistancia focal 2.**

Dado que $e = \frac{c}{a} \Rightarrow 0{,}4 = \frac{2}{a} \Rightarrow a = 5$

Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 25 = b^2 + 4 \Rightarrow b^2 = 21$

La ecuación de la elipse es:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{21} = 1$$

14 **Calcula la excentricidad de cada una de las elipses cuyas ecuaciones son las siguientes:**

a) $\frac{x^2}{80} + \frac{y^2}{20} = 1$

b) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{9} = 1$

c) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$

a) Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 80 = 20 + c^2 \Rightarrow c^2 = 60$

$$e = \frac{\sqrt{60}}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

b) Como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 18 = 9 + c^2 \Rightarrow c^2 = 9$

$$e = \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) Esta elipse tiene el eje mayor vertical, como $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow 49 = 25 + c^2 \Rightarrow c^2 = 24$

$$e = \frac{\sqrt{24}}{\sqrt{49}} = \frac{2\sqrt{6}}{7}$$

15 **Calcula el eje mayor, el eje menor, las coordenadas de los vértices y de los focos y la excentricidad de la elipse de ecuación:**

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$$

Teniendo en cuenta que $a^2 = b^2 + c^2$ y que $e = \frac{c}{a}$ entonces:
$25 = 16 + c^2 \Rightarrow c = 3$

Obtenemos:

Eje mayor $= 10$, eje menor $= 8$, $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $B(0, 4)$, $B'(0, -4)$, $F(3, 0)$ y $F'(-3, 0)$, $e = 0{,}6$.

16 **Calcula la ecuación de una hipérbola centrada en el origen cuyo eje real es 20 cm y cuya distancia focal es 32 cm.**

Como $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 16^2 = 10^2 + b^2 \Rightarrow b^2 = 156$

$$\frac{x^2}{100} - \frac{y^2}{156} = 1$$

17 **Determina la ecuación de una hipérbola de excentricidad 1,4 y semidistancia focal 7.**

Dado que $e = \frac{c}{a} \Rightarrow a = 5$; $c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow 49 = 25 + b^2 \Rightarrow b^2 = 24$

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{24} = 1$$

18 **Calcula la excentricidad de la hipérbola cuya ecuación es la siguiente:**

$$\frac{x^2}{80} - \frac{y^2}{20} = 1$$

$c^2 = a^2 + b^2 \Rightarrow c^2 = 80 + 20 = 100 \Rightarrow c = 10$

$$e = \frac{10}{\sqrt{80}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

19 **Calcula el eje real, el eje imaginario, las coordenadas de los vértices y de los focos, y la excentricidad de la hipérbola de ecuación:**

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$$

Dado que $c^2 = a^2 + b^2$ y que $e = \frac{c}{a}$, tenemos:

Eje real $= 2a = 10$, eje imaginario $= 2b = 8$, $A(5, 0)$, $A'(-5, 0)$, $F\left(\sqrt{41}, 0\right)$ y $F'\left(-\sqrt{41}, 0\right)$, $e = \frac{\sqrt{41}}{5}$

20 **Calcula las asíntotas de la hipérbola de ecuación:**

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{49} = 1$$

Las ecuaciones de las asíntotas de una hipérbola son:

$y = \pm\frac{b}{a}x$, en nuestro caso $b = 7$ y $a = 6$, por tanto:

$$y = \frac{7}{6}x \quad \text{y} \quad y = -\frac{7}{6}x$$

21 **Dada la hipérbola cuyo semieje real es 10 y cuya distancia focal es $20\sqrt{2}$, ¿puedes decir si es o no equilátera?**

Todas las hipérbolas equiláteras tienen $e = \sqrt{2}$, determinaremos la excentricidad de la que dice el enunciado:

$$e = \frac{10\sqrt{2}}{10} = \sqrt{2}$$

Podemos afirmar que esta hipérbola es equilátera.

22 **Calcula el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de la recta $x = -3$ y del punto $P(5, 0)$.**

$|x + 3| = \sqrt{(x - 5)^2 + y^2} \Rightarrow y^2 = 16x - 16$

23 Calcula la ecuación de una parábola de foco $F(3, -1)$ y directriz el eje de abscisas. Observa que esta parábola tiene el eje paralelo al eje de ordenadas, es decir, es una parábola vertical.

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+1)^2} = y \Rightarrow y = \frac{-x^2+6x-10}{2}$$

24 Calcula el parámetro p de una parábola de ecuación $y^2 = 2px$ con foco en el punto $(1, 0)$.

$p = 2$

Ejercicios y problemas (páginas 197/198)

Lugares geométricos

1 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de $A(-1, 3)$ y $B(7, -1)$.

Es una mediatriz de ecuación: $2x - y - 5 = 0$

2 Calcula la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia al eje de abscisas sea el doble que su distancia al punto $(1, 1)$.

$y = 2\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2} \Rightarrow 4x^2+3y^2-8x-8y+8=0$

3 Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano cuya distancia a la recta $y = -3$ sea el cuadrado de la distancia a la recta $x + y + 1 = 0$.

$$\begin{cases} y+3 = \left(\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy+2x-5=0 \\ -y-3 = \left(\dfrac{x+y+1}{\sqrt{2}}\right)^2 \Rightarrow x^2+y^2+2xy+2x+4y+7=0 \end{cases}$$

4 Calcula el lugar geométrico de los puntos que equidistan de las rectas $3x + 4y - 2 = 0$ y $6x - 8y + 13 = 0$.

Son las bisectrices de ecuaciones:

$16y - 17 = 0,\ 4x + 3 = 0$

5 Determina el lugar geométrico de los puntos del plano cuya suma de distancias a los ejes de coordenadas es igual a 6.

$|x| + |y| = 6$

Circunferencia

6 Calcula la ecuación de una circunferencia:

a) De centro el punto $C(1, 0)$ y radio 3.

b) De centro el punto $C(-1, -2)$ y radio 5.

c) De centro el punto $C(4, -4)$ y radio 4.

d) De centro el punto $C(0, 0)$ y radio 2.

a) $x^2+y^2-2x-8=0$ *c)* $x^2+y^2-8x+8y+16=0$

b) $x^2+y^2+2x+4y-20=0$ *d)* $x^2+y^2-4=0$

7 Halla las coordenadas del centro y el radio de las siguientes circunferencias.

a) $x^2+y^2-18x-9=0$

b) $x^2+y^2+6x+4y+10=0$

c) $x^2+y^2-4x+10y+33=0$

d) $4x^2+4y^2-8x+4y-14=0$

a) $C(9, 0)$ y $r = 3\sqrt{10}$

b) $C(-3, -2)$ y $r = \sqrt{3}$

c) Esta ecuación no corresponde a una circunferencia, ya que no hay ningún punto que cumpla sus condiciones.

d) $C\left(1, -\dfrac{1}{2}\right)$ y $r = \dfrac{\sqrt{19}}{2}$

8 Dada la circunferencia $x^2+y^2-4x+10y-50=0$, halla:

a) La ecuación de otra circunferencia concéntrica a ella de radio 8.

b) La ecuación de otra circunferencia concéntrica a ella que pase por el punto $(2, 2)$.

a) $x^2+y^2-4x+10y-35=0$

b) $x^2+y^2-4x+10y-20=0$

9 Calcula la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(0, -1)$, $B(1, 2)$ y $C(-3, 2)$.

Se deberá resolver el sistema:

$$\begin{cases} 1 \qquad\quad - n + p = 0 \\ 1+4+\ \ m+2n+p=0 \\ 9+4-3m+2n+p=0 \end{cases}$$

Se obtiene: $m = 2, n = -2, p = -3$

La ecuación de la circunferencia buscada es:

$$x^2+y^2+2x-2y-3=0$$

10 Determina la ecuación de una circunferencia de centro $C(2, -1)$ y que es tangente a la recta $3x - 4y + 10 = 0$.

El radio de la circunferencia será la distancia desde el centro hasta la recta tangente:

$$r = \frac{|3\cdot 2 - 4\cdot(-1)+10|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 4$$

En consecuencia, la ecuación de la circunferencia será:

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2+y^2-4x+2y-11=0$

11 Sean la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$ y una recta secante, $7x + y - 25 = 0$. Calcula la ecuación de la mediatriz del segmento determinado por la circunferencia y la recta.

En primer lugar, se deberán calcular los puntos de intersección de la circunferencia y la recta secante, resolviendo el siguiente sistema:

$$\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ 7x+y-25=0 \end{cases}$$

Se obtienen los puntos $(4, -3)$ y $(3, 4)$. La ecuación es:

$$\sqrt{(x-4)^2+(y+3)^2} = \sqrt{(x-3)^2+(y-4)^2}$$

Elevando al cuadrado, y agrupando, nos queda:

$$x - 7y = 0$$

12 Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene radio 4 y su centro está situado en la bisectriz del segundo cuadrante.

Si el centro se encuentra en la bisectriz del segundo cuadrante, las coordenadas de este serán de la forma $(-a, a)$; como pasa por el origen de coordenadas:

$$(-a)^2+a^2=16 \Rightarrow 2a^2=16 \Rightarrow a = 2\sqrt{2}$$

Las coordenadas del centro serán $(-2\sqrt{2}, 2\sqrt{2})$.

La ecuación de la circunferencia es:

$$x^2+y^2+4\sqrt{2}x-4\sqrt{2}y=0$$

13 Calcula la ecuación de una circunferencia que pasa por el origen de coordenadas, tiene su centro en la bisectriz del primer cuadrante y cuyo diámetro es $4\sqrt{2}$.

Las tres condiciones nos permiten escribir:

- *pasa por el origen* $\Rightarrow p = 0$
- *centro en la bisectriz* $\Rightarrow a = b$
- *radio* $= 2\sqrt{2} \Rightarrow a^2+b^2-(2\sqrt{2})^2=0 \Rightarrow a=b=\pm 2$

Como el centro está en el primer cuadrante, sus coordenadas son $(2, 2)$, y la ecuación de la circunferencia:

$$x^2+y^2-4x-4y=0$$

14 **Halla la ecuación de una circunferencia que pasa por los puntos $A(2, 1)$ y $B(3, -3)$ y tiene su centro sobre la recta de ecuación $x + y - 5 = 0$.**

Se deberá resolver el sistema:

$$\begin{cases} (2-a)^2 + (1-b)^2 = r^2 \\ (3-a)^2 + (-3-b)^2 = r^2 \\ a + b = 5 \end{cases}$$

Se obtiene:

$$a = \frac{53}{10} \qquad b = \frac{-3}{10}$$

$$r^2 = \frac{1\,258}{100}$$

Para la circunferencia, se obtiene:

$$10x^2 + 10y^2 - 106x + 6y + 156 = 0$$

15 **Calcula la longitud de la cuerda común a las circunferencias c_1: $x^2 + y^2 = 10$ y c_2: $x^2 + y^2 - 10x = 0$.**

Los puntos de corte de las dos circunferencias se obtienen resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 + y^2 - 10x = 0 \end{cases}$$

Se obtiene $(1, 3)$ y $(1, -3)$.

La longitud de la cuerda es: $\sqrt{(1-1)^2 + [3-(-3)]^2} = 6$

16 **Los extremos de un diámetro de una circunferencia son los puntos $A(-4, 5)$ y $A'(10, 9)$. Calcula la ecuación de esa circunferencia.**

El centro de la circunferencia es el punto $C(3, 7)$, y el radio, la distancia de este a uno cualquiera de los extremos del diámetro:

$$r = \sqrt{(3+4)^2 + (7-5)^2} = \sqrt{49+4} = \sqrt{53}$$

$$(x-3)^2 + (y-7)^2 = 53 \Rightarrow x^2 + y^2 - 6x - 14y + 5 = 0$$

17 **Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$, determina las ecuaciones de las rectas tangentes a esta que pasan por:**

a) **El punto $P(3, -4)$.**

b) **El punto $Q(0, 6)$.**

a) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y + 4 = m(x-3) \end{cases}$ deberá tener una solución.

$$x^2 + [m(x-3) - 4]^2 = 25$$
$$\Rightarrow x^2(1 + m^2) + (-6m^2 - 8m)x + 9m^2 + 24m - 9 = 0$$

Imponemos que el discriminante de la ecuación de segundo grado anterior sea 0.

$$64m^2 - 96m + 36 = 0 \Rightarrow m = \frac{3}{4}$$

La ecuación de la recta tangente es:

$$y + 4 = \frac{3}{4}(x-3) \Rightarrow 3x - 4y - 25 = 0$$

b) El punto Q no pertenece a la circunferencia.

El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ y - 6 = mx \end{cases}$ deberá tener una única solución.

Sustituyendo la segunda ecuación en la primera:

$$(m^2 + 1)x^2 + 12mx + 11 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{11}}{5}$$

Las dos rectas tangentes son:

$$y - 6 = \frac{\sqrt{11}}{5}x$$

$$y - 6 = -\frac{\sqrt{11}}{5}x$$

18 **Halla la ecuación de una circunferencia de centro $C(2, 3)$ tangente a la recta $4x - 3y + 6 = 0$.**

La distancia entre el centro de la circunferencia y la recta será el radio de aquella:

$$r = \frac{|4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 + 6|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = 1$$

La ecuación de la circunferencia pedida es:

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 - 4x - 6y + 12 = 0$$

19 **Dada la circunferencia $x^2 + y^2 = 16$, calcula la ecuación de la recta tangente a ella paralela a $2x - y + 3 = 0$.**

Si la recta ha de ser paralela a $2x - y + 3 = 0$, deberá tener una ecuación de la forma:

$$2x - y + C = 0$$

Además, esta recta deberá distar del centro de la circunferencia una longitud igual al radio:

$$4 = \frac{|2 \cdot 0 - 0 + C|}{\sqrt{5}} \Rightarrow C = \pm 4\sqrt{5}$$

Existen dos rectas tangentes a la circunferencia:

$$r_1\text{: } 2x - y + 4\sqrt{5} = 0 \quad \text{y} \quad r_2\text{: } 2x - y - 4\sqrt{5} = 0$$

20 **Halla las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 12 = 0$ que sean:**

a) **Paralelas a la recta $3x - 4y + 10 = 0$.**

b) **Perpendiculares a la recta $3x - 4y + 10 = 0$.**

a) La circunferencia tiene de centro el punto $C(2, -3)$, y de radio, 1.

La nueva recta debe ser paralela a $3x - 4y + 10 = 0$, y deberá distar 1 del centro.

$$1 = \pm\frac{3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + C}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} \Rightarrow \pm 5 = 6 + 12 + C$$
$$\Rightarrow C = -13 \text{ y } C = -23$$

Existen dos rectas paralelas a $3x - 4y + 10 = 0$ tangentes a la circunferencia:

$$3x - 4y - 13 = 0 \text{ y } 3x - 4y - 23 = 0$$

b) La nueva recta debe ser perpendicular a $3x - 4y + 10 = 0$, y debe distar del centro una unidad; es por tanto de la forma: $4x + 3y + C = 0$

$$1 = \pm\frac{4 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + C}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \Rightarrow \pm 5 = 8 - 9 + C$$
$$\Rightarrow C = 6 \text{ y } C = -4$$

Existen dos rectas perpendiculares a $3x - 4y + 10 = 0$ y tangentes a la circunferencia:

$$4x + 3y + 6 = 0 \text{ y } 4x + 3y - 4 = 0$$

Elipse

21 **Calcula las ecuaciones de las elipses de las que se conoce:**

a) **$b = 4$ y $c = 3$**

b) **$c = 9$ y $e = 0{,}2$**

c) **$2c = 10$ y $a = 10$**

d) **$b = 5$ y pasa por $P(-2, 4)$.**

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

b) $\dfrac{x^2}{2\,025} + \dfrac{y^2}{1\,944} = 1$

c) $\dfrac{x^2}{100} + \dfrac{y^2}{75} = 1$

d) $\dfrac{9x^2}{100} + \dfrac{y^2}{25} = 1$

22 **Determina los ejes, focos, vértices y excentricidad de las elipses:**

a) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ ***b)*** $3x^2+6y^2=12$

a) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$

$a=\sqrt{6}, b=\sqrt{2}$

Los vértices son:

$A(\sqrt{6},0),\ A'(-\sqrt{6},0),\ B(0,\sqrt{2}),\ B'(0,-\sqrt{2})$

$c^2=a^2-b^2=6-2=4, c=2$

Los focos son: $F(2,0)$ y $F'(-2,0)$

El eje mayor es: $2a=2\sqrt{6}$

El eje menor es: $2b=2\sqrt{2}$

La excentricidad es: $e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $3x^2+6y^2=12$

La elipse deberá escribirse de la forma siguiente:

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{2}=1 \Rightarrow a=2 \text{ y } b=\sqrt{2}$$

Los vértices son:

$A(2,0),\ A'(-2,0),\ B(0,\sqrt{2}),\ B'(0,-\sqrt{2})$

$c^2=a^2-b^2=4-2=2 \Rightarrow c=\sqrt{2}$

Los focos son: $F(\sqrt{2},0)$ y $F'(-\sqrt{2},0)$

El eje mayor es: $2a=4$

El eje menor es: $2b=2\sqrt{2}$

La excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

23 **Calcula la ecuación de una elipse centrada en el origen que pasa por los puntos $A(1,-1)$ y $B(0,-4)$.**

Imponemos que la elipse pase por estos puntos: $A(1,-1)$ y $B(0,-4)$.

$$\begin{cases}\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=1\\ \frac{16}{b^2}=1\end{cases} \Rightarrow b=4, a^2=\frac{16}{15}$$

Por consiguiente, la ecuación de la elipse será:

$$\frac{15x^2}{16}+\frac{y^2}{16}=1$$

24 **Comprueba si el punto $P(\sqrt{5}, 2\sqrt{2})$ pertenece a la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{10}=1$.**

El punto pertenece a la elipse, ya que sustituyendo el punto en la ecuación, cumple la igualdad:

$$\frac{(\sqrt{5})^2}{25}+\frac{(2\sqrt{2})^2}{10}=1$$

25 **Dada la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{10}=1$, calcula las coordenadas de un punto de dicha elipse cuya ordenada es el triple que la abscisa.**

Imponiendo $y=3x$, se obtiene:

$$\frac{x^2}{25}+\frac{9x^2}{10}=1 \Rightarrow 2x^2+45x^2=50 \Rightarrow x=\pm 5\sqrt{\frac{2}{47}}$$

Los puntos que cumplen la condición pedida son:

$$P_1\left(5\sqrt{\frac{2}{47}}, 15\sqrt{\frac{2}{47}}\right) \text{ y } P_2\left(-5\sqrt{\frac{2}{47}}, -15\sqrt{\frac{2}{47}}\right)$$

26 **Calcula la ecuación de una elipse cuyos focos son $F(2, 5)$ y $F'(2,-4)$, sabiendo, además, que $a=15$.**

$\sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}+\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}=30$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y-5)^2}=30-\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$

Elevando al cuadrado se obtiene:

$(x-2)^2+(y-5)^2=900+(x-2)^2+(y-4)^2-$
$-60\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$

$\Rightarrow -18y-891=-60\sqrt{(x-2)^2+(y+4)^2}$

Elevando de nuevo al cuadrado y agrupando:

$400x^2+364y^2-1\,600x-364y-80\,209=0$

27 **Determina las ecuaciones de las tangentes a la elipse de ecuación $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1$ en el punto $P(0,6)$.**

El punto no pertenece a la elipse.

El sistema $\begin{cases}\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{5}=1\\ y-6=mx\end{cases}$ deberá tener una única solución.

$$\frac{x^2}{16}+\frac{(6+mx)^2}{5}=1 \Rightarrow m=\pm\frac{\sqrt{31}}{4}$$

Las ecuaciones de las rectas tangentes son:

$$y=6+\frac{\sqrt{31}}{4}x,\quad y=6-\frac{\sqrt{31}}{4}x$$

28 **Calcula la ecuación de las rectas tangente y normal a la elipse $4x^2+y^2=20$ en el punto de abscisa 1 y ordenada negativa.**

Se calcula, en primer lugar, la recta tangente. El punto de tangencia cuya abscisa vale 1 es: $4\cdot 1+y^2=20 \Rightarrow y=\pm 4$.

Al imponerse que la ordenada sea negativa, tenemos para el punto de tangencia las coordenadas $(1,-4)$.

El sistema $\begin{cases}4x^2+y^2=20\\ y+4=m(x-1)\end{cases} \Rightarrow 4x^2+[m(x-1)-4]^2=20$

$\Rightarrow x^2[4+m^2]+x(-2m^2-8m)+m^2+8m-4=0$

Imponemos que el discriminante se anule:

$$m^2-2m+1=0 \Rightarrow m=1$$

La ecuación de la recta tangente es de la forma:

$$(y+4)=1\,(x-1) \Rightarrow x-y-5=0$$

La ecuación de la recta normal tiene la forma: $x+y+C=0$. Como sabemos que pasa por $(1,-4)$, se tiene que:

$$1-4+C=0 \Rightarrow C=3$$

La ecuación de la recta normal es la siguiente:

$$x+y+3=0$$

29 **Calcula la ecuación de la recta tangente a la elipse, cuya ecuación es $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1$, por el punto $P(6,0)$.**

El punto $P(6,0)$ no pertenece a la elipse.

La recta tangente a la elipse por el punto $P(6,0)$ será de la forma: $y=m(x-6)$, y únicamente deberá tener con esta un punto en común. Planteamos el sistema:

$\begin{cases}\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{9}=1\\ y=m(x-6)\end{cases}$ sustituyendo: $\frac{x^2}{18}+\frac{[m(x-6)]^2}{9}=1$

se obtiene: $x^2(1+2m^2)-24m^2x+72m^2-18=0$

Para que el discriminante sea 0, $m=\pm 1/\sqrt{2}$.

Las dos rectas tangentes son:

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(x-6),\quad y=-\frac{1}{\sqrt{2}}(x-6)$$

Hipérbola

30 **Halla los ejes, focos, vértices y excentricidad de las siguientes hipérbolas:**

a) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$

b) $x^2-3y^2=18$

c) $x^2-y^2=25$

a) *Ejes:* $a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$
$b^2=9 \Rightarrow b=3 \Rightarrow 2b=6$

Focos: $c^2=a^2+b^2=25+9=34 \Rightarrow c=\sqrt{34}$
$\Rightarrow F(\sqrt{34},0)$ y $F'(-\sqrt{34},0)$

Vértices: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{34}}{5}$

b) *Ejes:* $a^2=18 \Rightarrow a=\sqrt{18}=3\sqrt{2} \Rightarrow 2a=6\sqrt{2}$
$b^2=6 \Rightarrow b=\sqrt{6} \Rightarrow 2b=2\sqrt{6}$

Focos: $c^2=a^2+b^2=18+6=24 \Rightarrow c=\sqrt{24}$
$\Rightarrow F(\sqrt{24},0)$ y $F'(-\sqrt{24},0)$

Vértices: $A(3\sqrt{2},0)$, $A'(-3\sqrt{2},0)$

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{24}}{3\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$

c) *Ejes:* $a^2=25 \Rightarrow a=5 \Rightarrow 2a=10$
$b^2=25 \Rightarrow b=5 \Rightarrow 2b=10$

Focos: $c^2=a^2+b^2=25+25=50$
$\Rightarrow c=\sqrt{50}=5\sqrt{2} \Rightarrow F(5\sqrt{2},0)$ y $F'(-5\sqrt{2},0)$.

Vértices: $A(5,0)$, $A'(-5,0)$

Excentricidad: $e=\frac{\sqrt{50}}{5}=\sqrt{2}$

La excentricidad es $\sqrt{2}$, ya que la hipérbola es equilátera.

31 **La hipérbola $\frac{x^2}{25}-\frac{x^2}{b^2}=1$ pasa por $(3\sqrt{5},-2)$. Halla su ecuación.**

Sustituimos el punto $(3\sqrt{5},-2)$ en la ecuación de la hipérbola para obtener el valor de *b*:

$$\frac{(3\sqrt{5})^2}{25}-\frac{4}{b^2}=1 \Rightarrow 20b^2=100 \Rightarrow b^2=5$$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{5}=1$$

32 **Halla la ecuación de una hipérbola equilátera cuya distancia focal dé $8\sqrt{2}$. Calcula sus ejes, focos, vértices y excentricidad.**

$a^2+b^2=32 \Rightarrow$ dado que $a=b \Rightarrow 2a^2=32 \Rightarrow a^2=16$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{16}=1$$

Ejes: $a^2=16 \Rightarrow a=4 \Rightarrow 2a=8$
$b^2=16 \Rightarrow b=4 \Rightarrow 2b=8$

Focos: $c^2=a^2+b^2=16+16=32 \Rightarrow c=4\sqrt{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow F(4\sqrt{2},0)$ y $F'(-4\sqrt{2},0)$

Vértices: $A(4,0)$ y $A'(-4,0)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{4\sqrt{2}}{4}=\sqrt{2}$

33 **Determina el ángulo que forman las asíntotas de la hipérbola de ecuación $11x^2-7y^2=77$.**

$a^2=7 \Rightarrow a=\sqrt{7}$ $\qquad b^2=11 \Rightarrow b=\sqrt{11}$

Las ecuaciones de las asíntotas son:

$$y=\sqrt{\frac{11}{7}}x \qquad y=-\sqrt{\frac{11}{7}}x$$

El vector director de la primera asíntota es $\left(1,\sqrt{\frac{11}{7}}\right)$ y el de la segunda, $\left(1,-\sqrt{\frac{11}{7}}\right)$.

El ángulo que forman las rectas es:

$$\cos\alpha=\frac{|1-11/7|}{\sqrt{1+11/7}\cdot\sqrt{1+11/7}}=\frac{2}{9}$$

$$\Rightarrow \alpha=\text{arc cos}\left(\frac{2}{9}\right)=77°\,9'\,37{,}48''$$

34 **El eje imaginario de una hipérbola mide 16 cm, y sus asíntotas son $y=\frac{4}{5}x$ e $y=-\frac{4}{5}x$. Calcula la ecuación de la hipérbola, sus ejes, focos, vértices y excentricidad.**

$\frac{b}{a}=\frac{4}{5}=\frac{8}{a} \Rightarrow a=10$

La ecuación de la hipérbola es:

$$\frac{x^2}{100}-\frac{y^2}{64}=1$$

Ejes: $2a=20$, $2b=16$

Focos: $c^2=a^2+b^2=164 \Rightarrow c=\sqrt{164}=2\sqrt{41}$
$\Rightarrow F(2\sqrt{41},0)$ y $F'(-2\sqrt{41},0)$

Vértices: $A(10,0)$, $A'(-10,0)$

Excentricidad: $e=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{41}}{10}=\frac{\sqrt{41}}{5}$

35 **Dada la hipérbola $4x^2-10y^2=24$, calcula las coordenadas de un punto del tercer cuadrante cuya abscisa sea el doble que la ordenada. Determina las ecuaciones de la recta tangente y de la recta normal a dicha hipérbola que pasan por este punto.**

Las coordenadas del punto cumplirán: $P(2y,y)$

Sustituyendo en la ecuación de la hipérbola:
$16y^2-10y^2=24 \Rightarrow 6y^2=24 \Rightarrow y_1=2,\ y_2=-2$

El punto del tercer cuadrante, siendo la abscisa el doble que la ordenada es, $P(-4,-2)$.

El sistema:

$$\begin{cases}4x^2-10y^2=24\\ y+2=m(x+4)\end{cases}$$

deberá tener solución única.

$4x^2-10[m(x+4)-2]^2-24=0$

$x^2[4-10m^2]+x(-80m^2+40m)+(-160m^2+160m-64)=0$

La ecuación deberá tener discriminante cero.

$$1\,600m^2-2\,560m+1\,024=0 \Rightarrow m=-\frac{4}{5}$$

La ecuación de la recta tangente:

$$y+2=\frac{4}{5}(x+4) \Rightarrow 4x-5y+6=0$$

La recta normal tendrá de pendiente $y'=-\frac{5}{4}$, y su ecuación es:

$$y+2=-\frac{5}{4}(x+4) \Rightarrow 5x+4y+28=0$$

36 **Si la ecuación de una hipérbola es $x \cdot y = 1$, ¿cuáles son las ecuaciones de sus asíntotas? ¿Y la ecuación de su eje focal? ¿Cuánto vale el eje real? ¿Cuáles son las coordenadas de los focos? ¿Y las coordenadas de los vértices?**

Esta hipérbola es equilátera referida a sus asíntotas; por tanto, estas son: $x = 0$ e $y = 0$.

El eje focal coincide con la bisectriz del primer y tercer cuadrantes, y su ecuación es: $y = x$.

La hipérbola referida a sus asíntotas tiene como ecuación $x \cdot y = \frac{a^2}{2}$, en nuestro caso, $\frac{a^2}{2} = 1 \Rightarrow a = \sqrt{2}$, luego el eje real vale $2\sqrt{2}$.

Teniendo en cuenta que deben tener la ordenada igual que la abscisa, las coordenadas de los vértices serán:

$$2x^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 \Rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow A(1, 1) \text{ y } A'(-1, -1)$$

Dado que la hipérbola es equilátera, $c = \sqrt{2}a = 2$; las coordenadas del foco serán (x, y), con $x = y$:

$$2x^2 = c^2 = 4 \Rightarrow x = \pm\sqrt{2}$$

Las coordenadas de los focos son, $F\left(\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ y $F'\left(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$.

37 **Dada la ecuación de la hipérbola:**

$$x^2 - 6y^2 = 24$$

calcula n para que $y = 3x + n$ sea una de sus tangentes.

El sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 6y^2 = 24 \\ y = 3x + n \end{cases}$$

deberá tener solución única.

$x^2 - 6(3x + n)^2 = 24 \Rightarrow -53x^2 - 36nx - (24 + 6n^2) = 0$

El discriminante de esta ecuación deberá ser 0:

$1\,296n^2 - 212\,(24 + 6n^2) = 0 \Rightarrow n = \pm 2\sqrt{53}$

38 **Determina la ecuación de la recta tangente a la hipérbola de ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1$ en el punto $P(6, 0)$.**

El punto $P(6, 0)$ no pertenece a la hipérbola.

La recta tangente a la hipérbola por $P(6, 0)$ será de la forma: $y = m(x - 6)$, y únicamente deberá tener con ésta un punto en común. Planteamos el sistema:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{2} = 1 \\ y = m(x - 6) \end{cases}$$

Sustituyendo:

$$\frac{x^2}{4} - \frac{[m(x - 6)]^2}{2} = 1$$

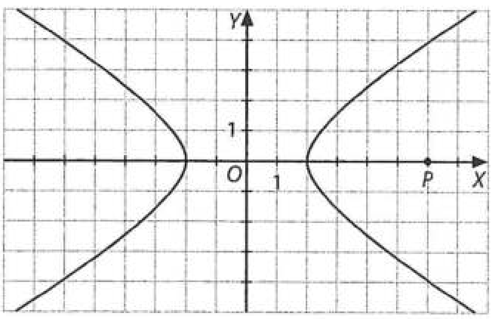
Se obtiene:

$$x^2(1 - 2m^2) + 24m^2x - 72m^2 - 4 = 0$$

Imponiendo que el discriminante sea 0, se obtiene:

$$256m^2 = -16$$

En conclusión, observamos que no es posible trazar una recta tangente a la hipérbola por el punto $P(6, 0)$.



Parábola

39 **Calcula la ecuación de las parábolas que tienen las siguientes características:**

a) **La directriz es la recta $x = -5$, y el foco, el punto $F(5, 0)$.**

b) **El vértice está en el origen de coordenadas, pasa por el punto $(5, 4)$ y su eje es el de abscisas.**

c) **El vértice está en el origen de coordenadas, pasa por el punto $(5, 4)$ y su eje es el de ordenadas.**

d) **El vértice está en el punto $V(5, 4)$ y la directriz es la recta $x = 0$.**

a) Puesto que el foco está sobre el eje de abscisas, y el origen equidista del foco y de la directriz, se trata de una parábola de la forma: $y^2 = 2px$. El parámetro es 10, y la ecuación de la parábola: $y^2 = 20x$

b) La parábola será de la forma: $y^2 = 2px$

Si pasa por $(5, 4)$, entonces: $p = 8/5$

La ecuación de la parábola es: $y^2 = 16x/5$

c) La parábola será de la forma: $x^2 = 2py$

Si pasa por $(5, 4)$, entonces: $p = 25/8$

La ecuación de la parábola es: $x^2 = 25y/4$

d) La ecuación será de la forma: $(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$
$\Rightarrow (y - 4)^2 = 2p(x - 5)$

Como la distancia del vértice a la directriz es $p/2 = 5$ $\Rightarrow p = 10$, obtenemos:

$$(y - 4)^2 = 20\,(x - 5)$$

40 **Halla la ecuación de una parábola cuyo foco es el punto $(1, 1)$ y su directriz, la recta $y = 2x$.**

$$\sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2} = \frac{|2x - y|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}}$$

$$\Rightarrow x^2 + 4y^2 - 10x - 10y + 4xy + 10 = 0$$

41 **Calcula la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 6x$ en el punto de coordenadas $P(6, -6)$.**

El sistema $\begin{cases} y^2 = 6x \\ y + 6 = m(x - 6) \end{cases}$ deberá tener una única solución

$$y^2 = \frac{y + 6 + 6m}{m} \cdot 6 \Rightarrow my^2 - 6y - 36(1 + m) = 0$$

Para que el discriminante sea 0, $m = -\frac{1}{2}$. Luego, la ecuación de la recta tangente es:

$$y + 6 = \frac{-1}{2}(x - 6) \Rightarrow x + 2y + 6 = 0$$

42 **Calcula la ecuación de la tangente a la parábola $y^2 = 10x - 30$ en el punto $P(1, 0)$.**

El punto $(1, 0)$ no pertenece a la parábola.

La recta $y = m(x - 1)$ que pasa por el punto $(1, 0)$ solo deberá tener un punto en común con la parábola.

$$\begin{cases} y^2 = 10x - 30 \\ y = m(x - 1) \end{cases} \Rightarrow [m(x - 1)]^2 = 10x - 30$$

$$\Rightarrow m^2x^2 - (2m^2 + 10)x + (m^2 + 30) = 0$$

El discriminante deberá ser cero:

$$-80m^2 + 100 = 0 \Rightarrow m = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$$

Las ecuaciones de las tangentes son:

$$y = \frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1), \quad y = -\frac{\sqrt{5}}{2}(x - 1)$$

Ejercicios de aplicación

43 **Determina la posición relativa de la elipse de ecuación $x^2 + 2y^2 = 3$ y la recta $x + 2y - 1 = 0$.**

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + 2y^2 = 3 \\ x + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

se obtiene: $(1 - 2y)^2 + 2y^2 = 3$

$\Rightarrow 3y^2 - 2y - 1 = 0 \Rightarrow y_1 = 1,\ y_2 = -\dfrac{1}{3}$

La recta y la elipse son secantes; los puntos de corte son: $P_1(-1, 1)$ y $P_2\left(\dfrac{5}{3}, -\dfrac{1}{3}\right)$

44 **Halla la posición relativa de la elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 25$.**

Resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 = 36 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$$

$4(25 - y^2) + 9y^2 = 36 \Rightarrow 100 - 4y^2 + 9y^2 = 36$
$\Rightarrow 5y^2 = -64$

La circunferencia y la elipse no se cortan. Es conveniente reflexionar sobre el hecho de que comparando el eje mayor de la elipse y el radio de la circunferencia se puede llegar a la conclusión de que la elipse es interior a la circunferencia.

45 **Calcula la posición relativa de la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 25$ y la recta $3x + 2y - 19 = 0$.**

Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 25 \\ 3x + 2y - 19 = 0 \end{cases}$$

y se observa que no tiene solución, luego la recta y la circunferencia son exteriores.

46 **Halla la posición relativa de la recta $x + y - 3 = 0$ y la elipse $\dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.**

Se plantea el sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{6} + \dfrac{y^2}{3} = 1 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases}$$

Se obtiene la ecuación:

$$y^2 - 2y + 1 = 0$$

que tiene una única solución:

$$y = 1$$

luego la recta y la elipse son tangentes en el punto $P(2, 1)$.

47 **Dadas las siguientes ecuaciones, identifica de qué cónica se trata e indica sus elementos característicos:**

a) $x^2 + y^2 - 10x + 6y + 30 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 10x + 6y - 25 = 0$

c) $(x - 5)^2 + \dfrac{(y - 3)^2}{5} = 1$

d) $4x^2 - 3(y + 7)^2 - 12 = 0$

e) $\dfrac{x^2}{8} - \dfrac{y^2}{2} = 10$

f) $(y - 5)^2 = 6(x - 1)$

a) Circunferencia de centro $C(5, -3)$ y radio 2.

b) No es una circunferencia.

c) Elipse centrada en el punto $(5, 3)$ con el eje mayor vertical $\sqrt{5}$ y el menor 1.

d) Hipérbola centrada en el punto $(0, -7)$ con distancia focal igual a 10 y la distancia entre los vértices $2\sqrt{3}$.

e) Hipérbola centrada en el origen con distancia focal igual a 20 y la distancia entre los vértices $2\sqrt{80} = 8\sqrt{5}$.

f) Parábola con vértice en el punto $(1, 5)$ de parámetro 3.

Evaluación (página 199)

1. Halla, mediante la definición de lugar geométrico, la ecuación de la mediatriz del segmento formado por los puntos $A(1, 2)$ y $B(4, 5)$.

Utiliza el programa GeoGebra para comprobar la solución.

Dado $P(x, y)$ perteneciente al lugar geométrico, se verifica que $d(P, A) = d(P, B)$. Entonces:

$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2} = \sqrt{(x-4)^2+(y-5)^2} \Rightarrow x^2-2x+1+y^2-4y+4 = x^2-8x+16+y^2-10y+25 \Rightarrow 6x+6y-36=0$
$\Rightarrow x+y-6=0$

Los pasos para comprobar en GeoGebra son:

- Insertamos los puntos A y B.
- Trazamos el segmento AB.
- Hallamos su punto medio y trazamos la mediatriz que pasa por ese punto.
- La ecuación se encontrará en la Vista Algebraica.
- Otra forma de hacerlo sería utilizando directamente la instrucción Mediatriz.

2. Calcula, mediante la definición de lugar geométrico, la ecuación de la bisectriz de las rectas

$$r: 4x - y + 1 = 0$$
$$s: -x + 4y - 4 = 0$$

Comprueba con el programa GeoGebra la solución.

Sea $P(x, y)$ perteneciente al lugar geométrico, se verifica que $d(P, r) = d(P, s)$. Entonces:

$$\frac{|4x-y+1|}{\sqrt{16+1}} = \frac{|-x+4y-4|}{\sqrt{1+16}} = 4x-y+1 = \pm(-x+4y-4) \Rightarrow \begin{cases} x-y+1=0 \\ x+y-1=0 \end{cases}$$

Los pasos para comprobar en GeoGebra son:

- Trazamos las rectas r y s.
- Hallamos las bisectrices mediante la herramienta Bisectriz.
- En la Vista Algebraica, salen las ecuaciones pedidas.

3. Determina la ecuación del lugar geométrico de los puntos que equidistan del punto $P(1, -1)$ tres unidades.

Verifica con el programa GeoGebra la solución.

Si $Q(x, y)$ pertenece al lugar geométrico, entonces, se verifica que $d(P, Q) = 3$.

$d(P, Q) = 3 \Rightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2} = 3 \Rightarrow (x-1)^2+(y+1)^2 = 9 \Rightarrow x^2+y^2-2x+2y-7=0$

Para hallar la solución en GeoGebra se tendría que construir una circunferencia mediante la herramienta Circunferencia (centro, radio).

4. Halla la ecuación del lugar geométrico de los puntos del plano si la suma de las distancias de los puntos $P(1, 5)$ y $Q(3, 5)$ es de $\sqrt{5}$ unidades.

Construye mediante GeoGebra el lugar geométrico pedido.

Se toma un punto $A(x, y)$ perteneciente al lugar geométrico, entonces, $d(P, A) + d(Q, A) = \sqrt{5}$. Es decir:

$\sqrt{(x-1)^2+(y-5)^2} + \sqrt{(x-3)^2+(y-5)^2} = \sqrt{5} \Rightarrow (4x-13)^2 = 20 \cdot [(x-3)^2+(y-5)^2] \Rightarrow 4x^2+20y^2-16x-200y+511=0$

Los pasos para comprobar en GeoGebra son:

- Situamos los puntos P y Q.
- Con la herramienta Circunferencia(centro, radio) trazamos dos circunferencias de radio 1 y $\sqrt{5}-1$ desde P y Q respectivamente.
- El punto de intersección de ambas circunferencias es un punto perteneciente a la elipse. Con la herramienta Elipse, hallamos la cónica.
- La ecuación se encontrará en la Vista Algebraica.

5. Clasifica las siguientes cónicas y señala sus elementos característicos.

a) $x^2 + y^2 = 5$

b) $x^2 + 2y^2 = 4$

c) $x^2 - 3y^2 = 9$

d) $y^2 - 3x = 5$

a) La cónica es una circunferencia de centro $C(0, 0)$ y radio $\sqrt{5}$.

b) Esta cónica es una elipse: $x^2+2y^2=4 \Rightarrow \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{2}=1 \Rightarrow \dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{(\sqrt{2})^2}=1$

- Sus focos son $F_1(-\sqrt{2}, 0)$ y $F_2(\sqrt{2}, 0)$.
- Sus vértices son $A_1(-2, 0)$, $A_2(2, 0)$, $B_1(0, -\sqrt{2})$ y $B_2(0, \sqrt{2})$.
- Su excentricidad es: $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

c) La cónica es una hipérbola: $x^2 - 3y^2 = 9 \Rightarrow \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{3^2} - \frac{y^2}{(\sqrt{3})^2} = 1$

- Los focos son $F_1(-2\sqrt{3}, 0)$ y $F_2(2\sqrt{3}, 0)$ y los vértices son $A'(-3, 0)$ y $A(3, 0)$.
- Su excentricidad es: $e = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

d) La cónica es una parábola: $y^2 - 3x = 5 \Rightarrow y^2 = 3\left(x + \frac{5}{3}\right) \Rightarrow y^2 - 2 \cdot \frac{3}{2}\left(x \cdot \frac{5}{3}\right)$

- El foco es $F\left(\frac{3}{4}, 0\right)$.
- El vértice es $V\left(\frac{5}{3}, 0\right)$.

6. Calcula la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(0, 6)$, $B(4, 10)$ y $C(8, 6)$. Halla el centro y el radio de dicha circunferencia.

Para que los tres puntos pertenezcan a la circunferencia deben de satisfacer la ecuación: $x^2 + y^2 + mx + my + p = 0$

Por lo que imponiendo las condiciones del enunciado se llega a que la ecuación es $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 36 = 0$ cuyo centro y radio son $C(4, 6)$ y 4.

7. Calcula la recta tangente a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0$ por los puntos:

a) $P(0, 4)$

b) $Q(4, 0)$

a) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0 \\ y = mx + 4 \end{cases}$ debe de tener una única solución y por ello el discriminante de $(1 + m^2)x^2 - 8x + 12 = 0$ tiene que ser cero. Los valores necesarios son $m = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Por tanto las rectas tangentes serán:

$$y = \frac{\sqrt{3}}{3}x - 4 \text{ y } y = -\frac{\sqrt{3}}{3}x - 4$$

b) El sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 - 8x - 8y + 28 = 0 \\ y = m(x - 4) \end{cases}$ debe de tener una única solución y por tanto:

$(1 + m^2)x^2 - 8(m^2 + m + 1)x + 16m^2 + 32m + 28 = 0$ tiene que tener el discriminante nulo.

Los valores necesarios son $m = \pm\sqrt{3}$. Por tanto las rectas tangentes serán:

$$y = \sqrt{3}x - 4 \text{ y } y = -\sqrt{3}x - 4$$

8. Halla la ecuación de la elipse centrada en el punto $A(-1, 3)$ con semieje mayor 10 u y excentricidad 0,6.

El centro es $A(-1, 3)$, el semieje mayor es $a = 10$ y $b^2 = a^2 - c^2 = 100 - (0{,}6 \cdot 10)^2$.

Así pues la ecuación quedaría:

$$\frac{(x + 1)^2}{100} + \frac{(y - 3)^2}{64} = 1$$

9. Determina la ecuación de la hipérbola horizontal centrada en el origen con distancia focal 12 u y distancia entre los vértices de 10 u. Calcula además la excentricidad y sus asíntotas.

La distancia focal es $2c$ entonces, $c = 6$. La distancia entre los vértices es $2a$ por lo que $a = 5$. Usando la relación entre los semiejes y semidistancia focal, se tiene que $b^2 = 11$.

Entonces la ecuación quedaría como: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{11} = 1$

Su excentricidad es $e = 1{,}2$ y sus asíntotas serán: $y = \frac{\sqrt{11}}{5}x$ e $y = -\frac{\sqrt{11}}{5}x$

10. Calcula la ecuación de la parábola cuyo foco es $F(0, 2)$ y su directriz es la recta con ecuación $y = -4$.

Usando la definición de lugar geométrico se tendría la ecuación: $\sqrt{x^2 + (y - 2)^2} = |y + 4|$

Simplificando se llega a: $y = \frac{1}{12}x^2 - 1$