6 GEOMETRÍA ANALÍTICA EN EL PLANO

El estudio de la geometría analítica del plano será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ella y comprobarán su aplicación en la vida cotidiana.

Al inicio de esta unidad se presentan los vectores y sus operaciones que los alumnos conocen de cursos anteriores, y se introducen los conceptos de base y base canónica. A continuación, se presenta una nueva operación con vectores, el producto escalar, así como su interpretación geométrica y sus propiedades. Es importante que el alumno recuerde conceptos como vector unitario para poder comprender otros que se definen a partir de este, base ortonormal.

Se trabajan las diferentes ecuaciones de la recta en el plano para utilizarlas después al determinar rectas paralelas y otras posiciones relativas entre rectas. Finalmente, se estudian las distancias de diferentes elementos del plano y las características que cumplen.

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de la geometría analítica del plano, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL)**. En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, el manejo de los conceptos relacionados con la geometría analítica del plano, etc.; para trabajar con los alumnos el hecho de que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Manejar los vectores en el plano y operar con ellos.
- Reconocer bases y determinar bases ortogonales y ortonormales.
- Trabajar con el producto escalar y sus propiedades.
- Reconocer y manejar las diferentes ecuaciones de rectas en el plano.
- Determinar la posición relativa de rectas en el plano, así como distancias entre distintos elementos del plano.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD			
Contenidos	**Criterios de evaluación**	**Estándares de aprendizaje evaluables**	**Competencias clave**
Vectores Vector fijo y vector libre Operaciones con vectores Combinación lineal de vectores. Base	1. Conocer y manejar con precisión los conceptos básicos de la geometría analítica. 2. Comprender el concepto de base.	1.1. Establece correspondencias analíticas entre las coordenadas de puntos y vectores. 1.2. Calcula la expresión analítica del módulo de un vector. 1.3. Distingue y maneja vectores fijos y vectores libres. 1.4. Realiza correctamente operaciones con vectores. 2.1. Reconoce el significado de combinación lineal de dos vectores. 2.2. Determina la independencia de vectores para llegar a formar bases en el plano.	CMCT CL CAA CSC
Producto escalar Un producto entre vectores: producto escalar Interpretación geométrica del producto escalar Propiedades del producto escalar Determinación del ángulo que forman dos vectores Expresión analítica del producto escalar Expresión analítica del ángulo entre dos vectores	3. Manejar la operación de producto escalar y sus consecuencias. 4. Entender los conceptos de base ortogonal y base ortonormal. Distinguir y manejarse con precisión en el plano euclídeo y en el plano métrico, utilizando en ambos casos sus herramientas y propiedades.	3.1. Calcula la expresión analítica del producto escalar y maneja sus propiedades. 3.2. Comprende la interpretación geométrica del producto escalar. 3.3. Utiliza medios tecnológicos adecuados para comprender la interpretación geométrica del producto escalar de vectores. 4.1. Emplea las consecuencias de la definición de producto escalar para normalizar vectores, calcular el coseno de un ángulo, estudiar la ortogonalidad de dos vectores o la proyección de un vector sobre otro. 4.2. Utiliza medios tecnológicos adecuados para comprender los conceptos de base ortogonal y base ortonormal.	CMCT CD CL CAA
Rectas en el plano Ecuaciones de la recta Rectas paralelas Posición relativa entre rectas Ángulo formado por dos rectas. Perpendicularidad	5. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo ecuaciones de rectas, y utilizarlas para resolver problemas de incidencia.	5.1. Obtiene la ecuación de la recta en sus diversas formas, identificando en cada caso sus elementos característicos. 5.2. Reconoce y diferencia analíticamente las posiciones relativas de las rectas. 5.3. Calcula ángulos entre dos rectas. 5.4. Utiliza medios tecnológicos adecuados para estudiar propiedades de la geometría analítica como determinar ecuaciones de la recta o posiciones relativas entre ellas.	CMCT CD CL CAA
Distancias en el plano Distancia entre dos puntos Distancia entre un punto y una recta Distancia entre dos rectas	6. Interpretar analíticamente distintas situaciones de la geometría plana elemental, obteniendo ecuaciones de rectas, y utilizarlas para resolver problemas de cálculo de distancias.	6.1. Calcula la distancia entre dos puntos. 6.2. Calcula la distancia entre un punto y una recta. 6.3. Calcula la distancia entre dos rectas. 6.4. Utiliza medios tecnológicos adecuados para determinar distancias entre distintos elementos del plano.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

Actividades de refuerzo
Actividades de ampliación

Prueba de evaluación

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Vectores
- Vector fijo y vector libre
- Operaciones con vectores
- Combinación lineal de vectores. Base

2. Producto escalar
- Un producto entre vectores: producto escalar
- Interpretación geométrica del producto escalar
- Propiedades del producto escalar
- Determinación del ángulo que forman dos vectores
- Expresión analítica del producto escalar
- Expresión analítica del ángulo entre dos vectores
- Base ortogonales y bases ortonormales del plano

3. Rectas en el plano
- Ecuaciones de la recta
- Rectas paralelas
- Posición relativa entre rectas
- Ángulo formado por dos rectas. Perpendicularidad

4. Distancias en el plano
- Distancia entre dos puntos
- Distancia entre un punto y una recta
- Distancia entre dos rectas

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

PARA EL ALUMNO

GeoGebra. Combinación lineal de vectores

GeoGebra. Interpretación del producto escalar

GeoGebra. Distancia entre un punto y una recta

Actividades interactivas. Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 145)

1. Halla las raíces de los siguientes polinomios.

a) $p(x) = 2x^3 - 6x^2 - 12x + 16$ ***b)*** $q(x) = x^4 - 10x^2 + 9$

a) Para hallar las raíces de un polinomio cúbico aplicamos la regla de Ruffini con los divisores del término independiente que en este caso son: $D(16) = \{\pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 16\}$

Las raíces de este polinomio son $x = 1$, $x = -2$, $x = 4$ ya que:

$$\begin{array}{c|rrrr} & 2 & -6 & -12 & 16 \\ 1 & & 2 & -4 & -16 \\ \hline & 2 & -4 & -16 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|rrr} & 2 & -4 & -16 \\ -2 & & -4 & 16 \\ \hline & 2 & -8 & \boxed{0} \end{array} \qquad \begin{array}{c|rr} & 2 & -8 \\ 4 & & 8 \\ \hline & 2 & \boxed{0} \end{array}$$

b) En este caso, es una ecuación bicuadrada por lo que se resuelve directamente: $x^2 = \dfrac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm 3 \\ x^2 = 1 \Rightarrow x = \pm 1 \end{cases}$

2. Calcula las soluciones de estas ecuaciones.

a) $3\sqrt{x-1} = \dfrac{5}{\sqrt{x-1}}$ ***b)*** $\log(x+7) - \log(2x-4) = 1 - \log(x-1)$ ***c)*** $2^x - 3 \cdot 4^x = -44$

a) $3 \cdot (x-1) = 5 \Rightarrow x = \dfrac{8}{3}$

b) $\log\left(\dfrac{x+7}{2x-4}\right) = \log\left(\dfrac{10}{x-1}\right) \Rightarrow \dfrac{x+7}{2x-4} = \dfrac{10}{x-1} \Rightarrow x^2 - 14x + 33 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = 11 \end{cases}$

c) $2^x - 3 \cdot 4^x = 44 \Rightarrow -3(2^x)^2 + 2^x + 44 = 0 \Rightarrow \begin{cases} 2^x = 4 \Rightarrow x = 2 \\ 2^x = -\dfrac{11}{3} \Rightarrow \nexists \text{ solución} \end{cases}$

3. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a) $\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases}$ ***b)*** $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y + z = 7 \\ y + z = 3 \end{cases}$

a) $\begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ 2x - y + 4z = 5 \\ -2x + 3y - z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + y + z = 5 \\ y - 2z = -5 \\ 7z = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y + z = 7 \\ y + z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ -2y + z = 2 \\ 3z = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 14/3 \\ y = -1/3 \\ z = 8/3 \end{cases}$

4. ¿Cómo calcularías de manera no gráfica el punto de intersección de las rectas $y = 3x - 6$ e $y = 2x - 5$? Calcula dicho punto.

El punto de intersección de estas dos rectas se puede hallar de forma no gráfica con un sistema de ecuaciones.

$\begin{cases} y = 3x - 6 \\ y = 2x - 5 \end{cases} \Rightarrow 3x - 6 = 2x - 5 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow y = -3$ El punto de intersección de estas dos rectas es $(1, -3)$.

5. Resuelve estas ecuaciones trigonométricas, dando sus soluciones en el intervalo $[0, 2\pi)$.

a) $\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ***b)*** $\operatorname{tg}(x + \pi) = 0$ ***c)*** $\operatorname{sen}\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right) = -1$

a) $\begin{cases} \dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{\pi}{2} \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{3\pi}{4} \Rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2} \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + \pi = 0 \Rightarrow x = -\pi \\ x + \pi = \pi \Rightarrow x = 0 \end{cases}$

c) $x + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2} \Rightarrow x = \pi$

6. Calcula el número complejo w en cada caso sabiendo que $z_1 = 2 + 3i$ y $z_2 = -1 - i$.

a) $w = z_1 + z_2$ ***b)*** $w = 2 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2$

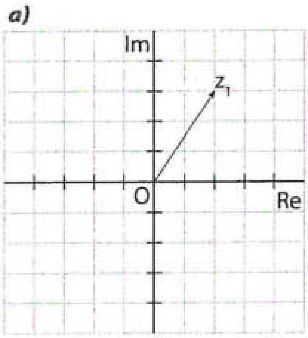
a) $w = z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (-1 - i) = 1 + 2i$

b) $w = 2 \cdot z_1 - 3 \cdot z_2 = (4 + 6i) - (-3 - 3i) = 7 + 9i$

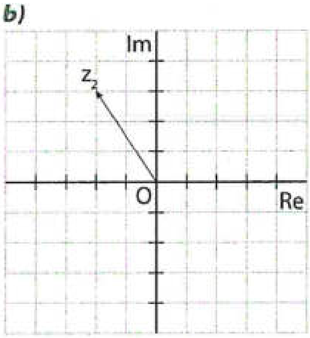
7. Representa los siguientes números complejos.

a) $z = 2 + 3i$ ***b)*** $z = -2 + 3i$ ***c)*** $z = 2 - 3i$ ***d)*** $z = -2 - 3i$

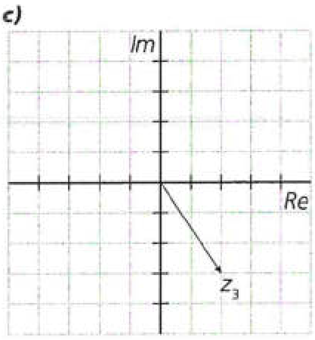
a)



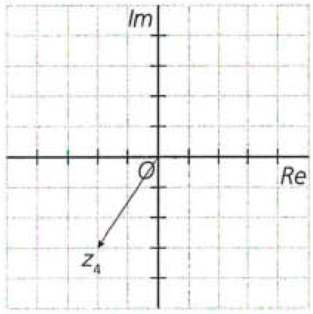
b)



c)



d)



Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Combinación lineal de vectores (página 148)

En el archivo de GeoGebra puede verse la representación gráfica de una combinación lineal de dos vectores según los valores de las componentes a y b. Moviendo los deslizadores correspondientes se puede comprobar, mediante la regla del paralelogramo, que la combinación lineal de los vectores resulta un único vector cuya dirección coincide con la de la diagonal del paralelogramo determinado por ambos vectores. También pueden moverse los extremos de los vectores y obtener así otras combinaciones distintas.

Interpretación geométrica del producto escalar (página 150)

En el archivo de GeoGebra aparece representado un par de vectores y la proyección ortogonal de uno de ellos sobre el otro. Moviendo los extremos de los vectores se obtiene la longitud de la nueva proyección en cada caso.

Distancia entre un punto y una recta (página 163)

En el archivo de GeoGebra se muestra, paso a paso, el método geométrico para determinar la distancia entre un punto y una recta. Puede ser interesante comprobar que se obtiene el mismo resultado que utilizando el método analítico descrito en la unidad. Moviendo el punto o la recta se obtienen nuevos ejercicios.

Rectas y puntos notables de un triángulo (página 167)

En el archivo de GeoGebra aparecen representadas las rectas y los puntos notables de un triángulo cualquiera. Activando las casillas correspondientes se observa cada tipo de recta y su relación con el triángulo o entre sí. Moviendo los vértices del triángulo también pueden comprobarse las propiedades de estas rectas y puntos notables según el tipo de triángulo dibujado.

Actividades (páginas 148/164)

1 **Razona cuáles de estos pares de vectores son linealmente independientes y, por tanto, constituyen una base de vectores libres del plano. A continuación, expresa $\vec{w} = (3, 1)$ como combinación lineal de las bases que hayas encontrado.**

a) $\vec{u}_1 = (1, 1)$ y $\vec{u}_2 = (0, 2)$

b) $\vec{v}_1 = (1/3, -1/2)$ y $\vec{v}_2 = (-2, 3)$

c) $\vec{z}_1 = \left(-2, \sqrt{3}/3\right)$ y $\vec{z}_2 = \left(-2\sqrt{3}, 1\right)$

d) $\vec{e}_1 = (1, 2)$ y $\vec{e}_2 = (-2, 1)$

a) Son l.i. porque no son paralelos:

$$(3, 1) = a(1, 1) + b(0, 2) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a \\ 1 = a + 2b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 3$ y $b = -1$, por lo que $\vec{w} = 3\vec{u}_1 - \vec{u}_2$.

b) Son l.d. porque son proporcionales:

$$\frac{1/3}{-2} = \frac{-1/2}{3} = -1/6 \Rightarrow \vec{v}_1 = -\vec{v}_2/6$$

c) Son l.d. porque son proporcionales:

$$\frac{-2}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}/3}{1} = \sqrt{3}/3 \Rightarrow \vec{z}_1 = \sqrt{3}\vec{z}_2/3$$

d) Son l.i. porque no son paralelos:

$$(3, 1) = a(1, 2) + b(-2, 1) \Rightarrow \begin{cases} 3 = a - 2b \\ 1 = 2a + b \end{cases}$$

$\Rightarrow a = 1$ y $b = -1$, por lo que $\vec{w} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$.

2 **Indica cuáles de los siguientes vectores son unitarios, y de ellos, cuáles tienen la misma dirección que el vector $\vec{v} = (2, \sqrt{5})$.**

$$\vec{a} = \left(-\frac{2}{3}, -\frac{5}{3\sqrt{5}}\right), \vec{b} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right), \vec{c} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right),$$

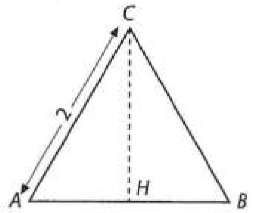
$$\vec{d} = (-1, 2), \vec{e} = \left(\frac{2}{9}, \frac{\sqrt{5}}{9}\right)$$

Se calculan sus módulos y se obtiene que $\vec{a}$ y $\vec{c}$ son unitarios. Los vectores $\vec{a}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección:

- $\dfrac{-2/3}{2} = \dfrac{-5/3\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{a}$ y $\vec{v}$ tienen la misma dirección.
- $\dfrac{-1/2}{2} \neq \dfrac{-\sqrt{3}/2}{\sqrt{5}} \Rightarrow \vec{c}$ y $\vec{v}$ no tienen la misma dirección.

3 **Calcula el producto escalar de los siguientes vectores de la figura 6.8:**

a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH}$ ***b)*** $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC}$



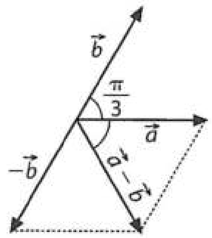
a) $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CH} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 30° = 3$

b) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HC} = 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \cos 90° = 0$

4 **Dado el vector $\vec{u} = \left(1, -\sqrt{3}\right)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.**

$|\vec{u} \cdot \vec{v}| = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| = 2 \cdot 3 = 6$

5 **A partir de $\vec{a}$ y $\vec{b}$, tales que $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ y el ángulo $(\vec{a}, \vec{b}) = \pi/3$ rad, calcula el ángulo $(\vec{a}, \vec{a} - \vec{b})$. Puedes ayudarte de su representación gráfica.**



Como puedes ver en el dibujo, el ángulo pedido es $\pi/3$ rad.

6 **Calcula el producto escalar de los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{u} = \left(1 - \sqrt{3}, \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{3} - 1, -6\right)$

b) $\vec{u} = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{3} + 1, -\dfrac{1}{3}\right)$ y $\vec{v} = \left(1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 =$

$$= \left(1 - \sqrt{3}\right) \cdot \left(\sqrt{3} - 1\right) + \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (-6) = -4$$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 =$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{3} + 1\right) \cdot \left(1 - \sqrt{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(1 + \sqrt{2}\right) = -\sqrt{2}$$

7 **Si $\vec{a} = (3x - 1, 2)$ y $\vec{b} = (7, 2 - x)$, calcula el valor de x si $\vec{a} \cdot \vec{b} = 16$.**

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 = (3x - 1) \cdot 7 - 2 \cdot (2 - x) = 16$
$\Rightarrow 19x - 3 = 16 \Rightarrow x = 1$

8 **Identifica los vectores unitarios de entre los siguientes. En el caso de que no lo sean, calcula el vector unitario que tiene la misma dirección y sentido.**

a) $\vec{u} = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$

b) $\vec{v} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)$

c) $\vec{w} = \left(-4, -\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{u}$ no es unitario.

El vector unitario es $\vec{u}/|\vec{u}| = \left(1/\sqrt{10}, 3/\sqrt{10}\right)$.

b) $\vec{v}$ es unitario.

c) $\vec{w}$ no es unitario.

El vector unitario es $\vec{w}/|\vec{w}| = \left(-2\sqrt{2}/3, -1/3\right)$.

9 **Calcula los ángulos que forman los siguientes pares de vectores.**

a) $\vec{v} = (3, -4)$ y $\vec{w} = (3/2, -1)$

b) $\vec{v} = (2, 6)$ y $\vec{w} = (-7, 1)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{9/2 + 4}{5 \cdot \sqrt{13/4}} \Rightarrow \alpha = 19{,}44°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{-14 + 6}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 100{,}30°$

10 **Determina el valor de z, para que los vectores $\vec{u} = (z, -3)$ y $\vec{v} = (1, -2)$:**

a) **Sean paralelos.**

b) **Sean perpendiculares.**

c) **Formen un ángulo de $\pi/4$ rad.**

d) **Formen un ángulo de $\pi/3$ rad.**

a) $\dfrac{z}{1} = \dfrac{-3}{-2} \Rightarrow z = \dfrac{3}{2}$

b) $z + 6 = 0 \Rightarrow z = -6$

c) $\cos\pi/4 = \dfrac{z + 6}{\sqrt{z^2 + 9} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow z = 9, z = -1$

d) $\cos\pi/3 = \dfrac{z + 6}{\sqrt{z^2 + 9} \cdot \sqrt{5}} \Rightarrow z = 24 \pm 15\sqrt{3}$

11 **Halla el ángulo entre estos vectores.**

a) $\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (1, 3)$

b) $\vec{u} = (-1, 1)$ y $\vec{v} = (2, 3)$

c) $\vec{u} = (-5, 2)$ y $\vec{v} = (2, 5)$

a) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{5}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} \Rightarrow \alpha = 45°$

b) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{1}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{11}} \Rightarrow \alpha = 82°\ 1'43{,}74''$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \dfrac{0}{\sqrt{29} \cdot \sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = 90°$

12 **Comprueba que los vectores $\vec{u} = (-1, 1)$ y $\vec{v} = (1, 1)$ forman una base ortogonal. Escribe de nuevo ambos vectores para que sean una base ortonormal y calcula las coordenadas del vector $\vec{z} = \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right)$.**

Para saber si dos vectores forman una base ortogonal el producto escalar debe ser cero, ya que serían perpendiculares y además tendrían direcciones distintas, es decir, serían linealmente independientes.

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-1, 1) \cdot (1, 1) = 0$$

Como el módulo de cada vector es $\sqrt{2}$, entonces, hay que dividir ambos vectores por dicho modulo para normalizarlos y así obtener vectores de módulo uno. Por tanto:

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (-1, 1) = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (1, 1) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

Así pues, para hallar las coordenadas del vector en la base ortonormal, se calcula el producto escalar del vector por cada vector de la base.

$$\vec{u} \cdot \vec{z} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) = 1$$

$$\vec{v} \cdot \vec{z} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(\sqrt{2}, 2\sqrt{2}\right) = 3$$

Luego, las coordenadas del vector con respecto la base ortonormal son 1 y 3.

13 **Determina tres puntos y un vector director de cada una de las siguientes rectas.**

a) $\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 3 + 2\lambda \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}$

b) $3x - 2y + 7 = 0$

c) $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y - 2}{-5}$

a) $\vec{v} = (-1, 2)$; puntos: $(0, 3)$, $(-1, 5)$, $(2, -1)$

b) $\vec{v} = (2, 3)$; puntos: $(0, 7/2)$, $(-7/3, 0)$, $(1, 5)$

c) $\vec{v} = (2, -5)$; puntos: $(0, -1/2)$, $(-1/5, 0)$, $(-1, 2)$

14 **Escribe, en forma general y paramétrica, la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(-1, 3)$ y es paralela al vector $\vec{v} = (-3, 4)$.**

Con los datos podemos escribir:

$$\frac{x + 1}{-3} = \frac{y - 3}{4} \Rightarrow 4x + 3y - 5 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = -1 - 3\lambda \\ y = 3 + 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

15 **Dada la recta que pasa por los puntos $A(-5, 8)$ y $B(0, 3)$, encuentra un vector que determine su dirección y calcula su ecuación general.**

$\overrightarrow{AB} = (5, -5)$; por tanto un vector director de la recta es $(1, -1)$ y la ecuación de la recta es $x + y - 3 = 0$.

16 **Determina qué ecuación general corresponde a cada uno de los ejes de coordenadas.**

Eje de abscisas: $\vec{v} = (1, 0)$, un punto $(0, 0)$, la ecuación general es $y = 0$.

Eje de ordenadas: $\vec{v} = (0, 1)$, un punto $(0, 0)$, la ecuación general es $x = 0$.

17 **Dada la recta $3x + 2y - 3 = 0$, halla el valor de su pendiente. Después, averigua la ecuación, en forma general, de otra recta que tenga la misma pendiente y pase por el punto $P(4, 2)$. ¿Qué se observa?**

La pendiente es $m = -3/2$.

Otra recta paralela tiene por ecuación general $3x + 2y + c = 0$.

Si contiene el punto $(4, 2)$, entonces:

$12 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -16$

La ecuación pedida es $3x + 2y + 16 = 0$.

Se observa que los coeficientes de x e y de la ecuación de la nueva recta son iguales que los de la ecuación de la recta inicial, ya que ambas rectas son paralelas.

18 **Escribe, en forma explícita, la ecuación de la recta que corta el eje de ordenadas en $y = 3$ y el valor de cuya pendiente es 7.**

Si $m = 7$ y $n = 3$, la ecuación es $y = 7x + 3$.

19 **Escribe, en forma explícita, la ecuación de la recta que corta el eje de abscisas en el punto $x = -2$, y cuyo vector director es $\vec{v} = (1, \sqrt{3})$. ¿Qué ángulo forma con el eje de abscisas?**

$m = \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{3}; 0 = \sqrt{3} \cdot (-2) + n \Rightarrow n = 2\sqrt{3}$

La ecuación es $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$, y el ángulo es 60°, puesto que $\text{tg } 60° = \sqrt{3}$.

20 **¿Cuál es la ecuación explícita de una recta que pasa por el punto $(-2, 3)$ y cuyo vector director es $\vec{v} = \left(0, -\frac{1}{2}\right)$?**

Es un vector paralelo al eje de ordenadas, la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 3)$ con esa dirección es $x = -2$.

21 **Dados los puntos $A(-3/2, 7)$ y $B(1/2, 5)$:**

a) **Averigua un vector director de la recta que contiene A y B, y su pendiente.**

b) **Determina la ecuación general de la recta, r, que contiene A y B.**

c) **Escribe una ecuación punto-pendiente de dicha recta.**

d) **Halla sus puntos de intersección con los ejes de coordenadas.**

e) **¿Describe la recta r la ecuación $(x, y) = (9/2, 1) + \lambda(-1, 1)$?**

a) $\overrightarrow{AB} = (2, -2), m = -1$

b) $2x + 2y - 11 = 0$

c) $y - 7 = -1(x + 3/2)$

d) $(11/2, 0), (0, 11/2)$

e) Sí, $(9/2, 1)$ pertenece a r y $(-1, 1)$ es paralelo a $\overrightarrow{AB}$.

22 **Escribe la ecuación en forma continua de una recta que forma un ángulo de 30° con el semieje positivo de abscisas y cuya ordenada en el origen es 1.**

$m = \text{tg } 30° = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \vec{v} = (3, \sqrt{3})$, la ecuación es: $\frac{x}{3} = \frac{y-1}{\sqrt{3}}$

23 **Una recta pasa por el punto de intersección del eje de abscisas y la recta de ecuación $\frac{x}{4} - \frac{y}{3} = 1$, y por el punto $(1, -7)$.**

Escribe su ecuación en forma vectorial.

Puntos de la recta $(4, 0)$ y $(1, -7)$, por lo que $\vec{v} = (3, 7)$.

La ecuación es: $(x, y) = (4, 0) + \lambda(3, 7), \lambda \in \mathbb{R}$

24 **Dada $\frac{7-x}{2} = \frac{y-3}{7}$, averigua la ecuación en forma general de la recta que pasa por la intersección de $r: x = y$ y $s: x + y = 3$ y tiene la misma pendiente.**

Resolviendo el sistema se obtiene el punto $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$.

Entonces la recta pedida, paralela a la recta dada, cuya dirección viene dada por el vector $(-2, 7)$ es: $14x + 4y - 27 = 0$

25 **Dada la recta $4y = x + 2$, calcula la ecuación general de otra recta paralela a ella que pase por el punto $A\left(7, \frac{3}{4}\right)$.**

$m = \frac{1}{4}$, es decir, un vector director puede ser $(4, 1)$. Imponiendo que pase por $A(7, 3/4)$, tenemos la ecuación de la recta es: $x - 4y - 4 = 0$

26 **Determina la ecuación de la recta que pasa por $O(0, 0)$ y es paralela a la recta cuyas ecuaciones paramétricas son las siguientes:**

$$\begin{cases} x = -\lambda \\ y = 7 + 3\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

Un vector director de la recta buscada es $(-1, 3)$, y como debe contener el origen de coordenadas, la ecuación es: $3x + y = 0$

27 **Determina la ecuación de una recta paralela al eje de ordenadas que pase por el punto $A\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$.**

Es una recta vertical cuya ecuación es: $x = -\frac{2}{3}$

28 **Determina la ecuación punto–pendiente de una recta que pase por el punto $P(1, -2)$ y que sea paralela a otra cuya ecuación vectorial es la siguiente:**

$$(x, y) = (2, 5) + \left(-\frac{2}{3}, 1\right)\lambda \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Un vector director de la recta buscada es $(-2/3, 1)$, luego su pendiente es $-3/2$, y debe contener el punto $P(1, -2)$, por lo que su ecuación punto-pendiente es: $y + 2 = -\frac{3}{2}(x - 1)$

29 **Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas, estudiando la proporcionalidad de los vectores directores y la de los coeficientes de la recta en forma general, antes de resolver el sistema. En los casos en que sean secantes, determina el punto de intersección.**

a) $r: 3x + 2y - 1 = 0 \quad s: 5x - y + 7 = 0$

b) $r: 2x - 3y + 7 = 0 \quad s: -4x + 6y = 0$

c) $r: 8x - 2y + 2 = 0 \quad s: -4x + y - 1 = 0$

d) $r: \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}, \text{con } \lambda \in \mathbb{R} \quad s: \frac{x+1}{-1} = \frac{y+5}{3}$

e) $r: (x, y) = (2, -1) + \lambda(1, -1)$, con $\lambda \in \mathbb{R}$

$s: -x + y + 5 = 0$

f) $r: \frac{x+2}{5} = \frac{2-y}{-1} \quad s: x - 5y + 12 = 0$

g) $r: 2x - 2y + 5 = 0 \quad s: x - y + 2 = 0$

a) Los coeficientes no son proporcionales: $\frac{3}{5} \neq \frac{2}{-1}$, por lo que son secantes. Resolviendo el sistema, se obtiene que el punto de intersección es $(-1, 2)$.

b) Los coeficientes son proporcionales: $\frac{2}{-4} = \frac{-3}{6}$, por lo que son paralelas, y no son coincidentes, puesto que los términos independientes no mantienen la proporción $-1/2$.

c) Son paralelas y coincidentes porque todos los coeficientes son proporcionales: $\frac{8}{-4} = \frac{-2}{1} = \frac{2}{-1}$

d) Los vectores directores son proporcionales: $\frac{1}{-1} = \frac{-3}{3}$, por lo que son paralelas. Los puntos de r, por ejemplo $(0, 2)$, no pertenecen a s, por lo que no son coincidentes.

e) Un vector director de r es $(1, -1)$ y uno de s es $(1, 1)$, por lo que son secantes. Resolviendo el sistema se obtiene el punto de intersección $(3, -2)$.

f) Un vector director de r es (5, 1) y uno de s es (5, 1), por lo que son paralelas. Los puntos de r, por ejemplo (−2, 2), verifican la ecuación de la recta s, por lo que son coincidentes.

g) Un vector director de r es (1, 1) y uno de s es (1, 1), por lo que son paralelas. Los puntos de s, por ejemplo (0, 2), no verifican la ecuación de r, por lo que no son coincidentes.

30 **Dados los puntos $A(0, -3)$, $B(1, 5)$, $C(-1, 3)$ y $D(1, 0)$, averigua los ángulos que determinan las rectas cuyos vectores directores son:**

a) **$\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$**

b) **$\overrightarrow{AC}$ y $\overrightarrow{BD}$**

a) $\overrightarrow{AB} = (1, 8)$ y $\overrightarrow{CB} = (-2, -2)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}|}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{CB}|} = \frac{2+16}{\sqrt{65}\cdot\sqrt{8}} \Rightarrow \alpha = 37{,}87°$$

b) $\overrightarrow{AC} = (-1, 6)$ y $\overrightarrow{BD} = (0, -5)$

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{AC}|\cdot|\overrightarrow{BD}|} = \frac{30}{\sqrt{37}\cdot 5} \Rightarrow \alpha = 9{,}46°$$

31 **Dadas las rectas $r: \begin{cases} x = -m\alpha \\ y = 2 + 2\alpha \end{cases}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ y $s: y = \frac{4}{3}x - 2$, determina m para que estas sean perpendiculares.**

Se debe cumplir que: $(-m, 2)\cdot(3, 4) = 0 \Rightarrow -3m + 8 = 0$

Por tanto: $m = 8/3$

32 **Dadas las rectas $r: ax - 2y + 7 = 0$ y $s: \frac{x+1}{b} = \frac{y}{2}$, halla a y b sabiendo que las rectas son perpendiculares y que r pasa por el punto $P(-1, 2)$.**

En primer lugar, son perpendiculares, luego: $(2, a)\cdot(b, 2) = 0$.

Si r pasa por $(-1, 2)$, entonces: $-a - 4 + 7 = 0$, luego se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} a + b = 0 \\ a = 3 \end{cases} \Rightarrow a = 3 \text{ y } b = -3$$

33 **Obtén la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(7, -2)$ y forma un ángulo de 120° con el eje de abscisas, en sentido positivo.**

$m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$

La ecuación punto-pendiente es: $y + 2 = -\sqrt{3}\,(x - 7)$

En forma general: $\sqrt{3}x + y - 7\sqrt{3} + 2 = 0$

34 **Halla la ecuación de las rectas que pasan por el punto $A(3, -1)$ y forman un ángulo de 30° con la recta $x = 4$.**

La recta $x = 4$ es vertical, por lo que estamos buscando las ecuaciones de las dos rectas que pasan por $A(3, -1)$ que forman un ángulo de 60° y 120°, respectivamente, con el eje de abscisas en sentido positivo.

- $r: m = \text{tg } 60° = \sqrt{3}$, luego $y + 1 = \sqrt{3}(x - 3)$
  $\Rightarrow \sqrt{3}x - y - 3\sqrt{3} - 1 = 0$
- $s: m = \text{tg } 120° = -\sqrt{3}$, luego $y + 1 = -\sqrt{3}(x - 3)$
  $\Rightarrow \sqrt{3}x + y - 3\sqrt{3} + 1 = 0$

35 **Calcula la distancia entre la recta $r: \begin{cases} x = 3 - 2\lambda \\ y = -\lambda \end{cases}$, con $\lambda \in \mathbb{R}$ y el punto de intersección de las rectas:**

$$s: 2x + 3y - 1 = 0 \text{ y } t: x + y + 2 = 0$$

Primero se determina el punto de intersección de s y t:

$$\begin{cases} 2x + 3y - 1 = 0 \\ x + y + 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow P(-7, 5)$$

La recta r en forma general es $x - 2y - 3 = 0$.

La distancia entre P y r es:

$$d(P, r) = \frac{|-7 - 2\cdot 5 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{20}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5}\text{ u}$$

36 **Determina la longitud de la altura correspondiente a A en el triángulo de vértices $A(1, 4)$, $B(7, 5)$ y $C(-1, -3)$.**

Buscamos la ecuación en forma general de la recta que pasa por B y C:

$\overrightarrow{BC} = (-8, -8)$, luego un vector director de la recta será:

$$\vec{v} = (1, 1)$$

Si la recta pasa por C, entonces: $x + 1 = y + 3 \Rightarrow x - y - 2 = 0$.

La altura del triángulo ABC, correspondiente al vértice A, es la siguiente distancia:

$$d(A, r) = \frac{|1 - 4 - 2|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}\text{ u}$$

37 **Halla la distancia entre la recta $r: 5x - y + 7 = 0$ y una paralela a ella que pase por el punto (1, 7).**

Una recta paralela es de la forma $5x - y + c = 0$.

Como pasa por (1, 7), tenemos: $5 - 7 + c = 0 \Rightarrow c = 2$

Luego la recta paralela es $5x - y + 2 = 0$.

Un punto de ella es $P(0, 2)$, por lo que la distancia pedida es:

$$d(r, s) = d(P, r) = \frac{|0 - 2 + 7|}{\sqrt{5^2 + (-1^2)}} = \frac{5}{\sqrt{26}}\text{ u}$$

38 **Calcula la distancia entre la recta $r: 3x - 4y + 6 = 0$ y una paralela a ella que dista 3 unidades del origen de coordenadas (dos soluciones).**

Una recta paralela a la dada, tiene por ecuación:

$$s: 3x - 4y + C = 0$$

Buscamos dos rectas que disten 3 unidades del origen de coordenadas, (0, 0). Luego:

$$d(O, s) = \frac{|C|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{|C|}{5} = 3\text{ u} \Rightarrow |C| = 15$$

$\Rightarrow C = 15$ y $C = -15$

Las ecuaciones de las rectas paralelas a la del enunciado que distan 3 unidades del origen son:

$$s_1: 3x - 4y + 15 = 0 \text{ y } s_2: 3x - 4y - 15 = 0$$

Un punto de la recta r es $P(-2, 0)$:

- $d(r, s_1) = d(P, s_1) = \dfrac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 0 + 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{9}{5}\text{u}$
- $d(r, s_2) = d(P, s_2) = \dfrac{|3\cdot(-2) - 4\cdot 0 - 15|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \dfrac{21}{5}\text{u}$

Por tanto, las distancias pedidas son $\frac{9}{5}$ u y $\frac{21}{5}$ u, respectivamente.

Ejercicios y problemas (páginas 170/174)

Vectores

1 **Calcula el extremo del vector $\vec{v} = (\sqrt{2}, -1)$ si su origen es el punto $A\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 4\right)$.**

Si $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, entonces: $B\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 3\right)$

2 **Calcula las componentes y el módulo de los vectores.**

a) $\vec{w} = -3\cdot\left(-\frac{1}{3}, +3\right) + \sqrt{2}\left(\frac{2}{3\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

b) $\vec{w} = \left(5, \sqrt{3}\right) - \sqrt{6}\cdot\left(1, -\sqrt{2}\right)$

a) $\vec{w} = \left(\frac{5}{3}, \frac{-25}{3}\right)$, $|\vec{w}| = \frac{5\sqrt{26}}{3}$

b) $\vec{w} = \left(5 - \sqrt{6}, 3\sqrt{3}\right)$, $|\vec{w}| = 5{,}79$

3 **Calcula x e y para que se cumpla esta igualdad:**

$$\frac{1}{3}\cdot(2x, 3y-6) = (-2, 12) - \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1-x}{4}, 0\right)$$

$x = -7, y = 14$

4 **Si $\vec{a} = (3, 1/2)$, $\vec{b} = (-2/3, 5)$ y $\vec{c} = (2, 3)$, determina las siguientes combinaciones lineales.**

a) $3\vec{a} - 2(\vec{b} + \vec{c})$

b) $3(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c})$

a) $3\vec{a} - 2(\vec{b} + \vec{c}) = (9, 3/2) - 2(4/3, 8) = (9, 3/2) - (8/3, 16) =$
$= (19/3, -29/2)$

b) $3(\vec{a} - \vec{b}) + \frac{1}{3}(\vec{b} - \vec{c}) = 3(11/3, -9/2) + \frac{1}{3}(-8/3, 2) =$
$= (11, -27/2) + (-8/9, 2/3) = (91/9, -77/6)$

5 **Halla el valor de x e y si $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b}$, sabiendo que $\vec{a} = (-1, 3)$, $\vec{b} = (7, 5)$ y $\vec{v} = (5, -2)$.**

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 5 = -x + 7y \\ -2 = 3x + 5y \end{cases} \Rightarrow x = -3/2, y = 1/2$$

6 **Calcula las coordenadas de los puntos que dividen el segmento AB en cuatro partes iguales, si $A(22, 7)$ y $B(-6, 5)$.**

Los tres puntos son $M\left(15, \frac{13}{2}\right)$, $N(8, 6)$ y $P\left(1, \frac{11}{2}\right)$.

Dependencia lineal y bases

7 **¿Es el vector $\vec{v} = \left(2, -\frac{5}{7}\right)$ una combinación lineal del vector $\vec{u} = \left(-7, \frac{5}{2}\right)$? Expresa la respuesta enunciando la característica que los relaciona.**

Sí, $\left(2, \frac{-5}{7}\right) = \frac{-2}{7}\cdot\left(-7, \frac{5}{2}\right)$, luego son paralelos.

8 **La combinación lineal de dos vectores paralelos, ¿es necesariamente otro vector paralelo a ellos?**

Sí, $\vec{v} = k\vec{w}$, $a\vec{v} + b\vec{w} = ak\vec{v} + b\vec{w} = (ak + b)\cdot\vec{w}$, que es un vector paralelo a los anteriores.

9 **¿Es posible que dos vectores linealmente dependientes formen un ángulo de 180°? ¿Y un ángulo de 90°?**

Sí, son vectores de la misma dirección y sentido opuesto.

No, si forman un ángulo de 90° no son paralelos, por lo tanto no son dependientes.

10 **¿Son los vectores $\vec{u} = (4, 2)$ y $\vec{v} = (-2, -1)$ linealmente dependientes? ¿Son paralelos?**

Como $\vec{u} = -2\cdot\vec{v}$, son l.d. y por lo tanto paralelos.

11 **Los puntos $A(2, 6)$, $B(5, 8)$ y $C(17, m)$ están alineados. Calcula m.**

Si están alineados, debe cumplirse que $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$, de lo cual se deduce que:

$$\frac{3}{15} = \frac{2}{m-6} \Rightarrow m = 16$$

12 **Considera los puntos del plano $A(3, 2)$, $B(-1, 8)$ y $C(k, k+4)$ con $k \in \mathbb{R}$. Calcula el valor de k para que A, B y C estén alineados.**

Para que los puntos A, B y C estén alineados se ha de verificar que $\overrightarrow{AB} = a\cdot\overrightarrow{AC}$, donde a es un parámetro.

Como $\overrightarrow{AB} = (-4, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (k-3, k+2)$:

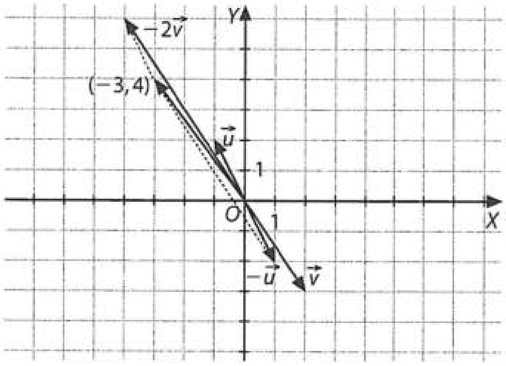
$$(-4, 6) = a(k-3, k+2) \Rightarrow \begin{cases} -4 = a(k-3) \\ 6 = a(k+2) \end{cases}$$

Despejando a de las dos ecuaciones e igualando, se obtiene:

$$\frac{-4}{k-3} = \frac{6}{k+2} \Rightarrow k = 1$$

13 **Expresa el vector $\vec{w} = (-3, 4)$ como combinación lineal de los vectores $\vec{u} = (-1, 2)$ y $\vec{v} = (2, -3)$. Realiza la representación gráfica para comprobar el resultado.**

$$(-3, 4) = -1(-1, 2) - 2(2, -3)$$



14 **Di cuáles de los siguientes pares de vectores forman base.**

a) $(-3, 1)$ y $\left(\sqrt{3}, -\sqrt{3}/3\right)$

b) $\left(-\sqrt{2}, 4\right)$ y $\left(-1/\sqrt{2}, 2/\sqrt{2}\right)$

c) $(-5, 1)$ y $\left(2\sqrt{5}, -\sqrt{5}\right)$

d) $\left(2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}\right)$ y $\left(1, -7 - 4\sqrt{3}\right)$

e) $\left(1/(\sqrt{5}+1), (\sqrt{5}-1)/4\right)$ y $(1, 1)$

a) $-3/\sqrt{3} = 1/\left(-\sqrt{3}/3\right)$ no forman base.

b) $-\sqrt{2}/\left(-1/\sqrt{2}\right) \neq 4/\left(2/\sqrt{2}\right)$ sí forman base.

c) $-5/2\sqrt{5} \neq 1/\left(-\sqrt{5}\right)$ sí forman base.

d) $2 - \sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)/\left(-7 - 4\sqrt{3}\right)$ forman base.

e) $\frac{1}{\sqrt{5}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ forman base.

15 **Dado el vector $\vec{v} = (3, -7)$, expresa el vector $\vec{v}$ en la base formada por los vectores $\vec{a} = (-1, 1)$ y $\vec{b} = (2, -1)$.**

$$\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} \Rightarrow \begin{cases} 3 = -x + 2y \\ -7 = x - y \end{cases}$$

$\Rightarrow \vec{v} = (-11, -4)$ en la base $\{\vec{a}, \vec{b}\}$

Producto escalar

16 **Calcula el producto escalar de dos vectores de módulos 3 y 4, respectivamente, que forman 60°.**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = 3\cdot 4\cdot\cos 60° = 6$

17 **Calcula el producto escalar de los vectores $\vec{u} = (1, 1)$ y $\vec{v} = (3, 4)$. Determina el ángulo que forman.**

$\vec{u}\cdot\vec{v} = (1, 1)\cdot(3, 4) = 7$. Aplicando la fórmula para el coseno del ángulo que forman dos vectores, se obtiene $\alpha = 8{,}13°$.

18 **Calcula el ángulo que forman $\vec{v} = (3, 4)$ y $\vec{w} = (-3, 1)$.**

$$\cos\alpha = \frac{(3,4)\cdot(-3,1)}{5\sqrt{10}} = \frac{-5}{5\sqrt{10}}$$

Por tanto, $\alpha = 108{,}43°$.

19 **¿Es posible que dos vectores cuyo producto escalar vale 3 formen un ángulo de 120°? Razona la respuesta.**

No es posible, puesto que si el producto escalar es positivo el ángulo que forman es agudo.

20 **Determina qué ángulos forman los siguientes pares de vectores.**

a) **$\vec{u} = (3, 2)$ y $\vec{v} = (7, -1)$**

b) **$\vec{u} = \left(2-\sqrt{2}, 2/\left(2+\sqrt{2}\right)\right)$ y $\vec{v} = (1, -1)$**

c) **$\vec{u} = \left(\sqrt{5}/2, -\sqrt{5}\right)$ y $\vec{v} = (-1, 2)$**

a) $\cos\alpha = \dfrac{21-2}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 41°\,49'\,12{,}61''$

b) $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

c) $\cos\alpha = \dfrac{\left(-5\sqrt{5/2}\right)}{\left(5/2\sqrt{5}\right)} = -1 \Rightarrow \alpha = 180°$

21 **Dado el vector $\vec{u} = (-5, 2)$, determina cuáles de los siguientes vectores son paralelos y cuáles perpendiculares a dicho vector.**

a) **$\vec{v} = (5, -2)$** ***d)*** **$\vec{n} = (-4, -10)$**

b) **$\vec{w} = (2, -5)$** ***e)*** **$\vec{o} = (5/2, -1)$**

c) **$\vec{m} = (-2, -5)$** ***f)*** **$\vec{p} = (1, 5/2)$**

Paralelos: *a)* y *e)*

Perpendiculares: *c)*, *d)* y *f)*.

22 **Dados $A(3, 0)$, $B(1, 4)$, $C(-1, 3)$ y $D(-1, -2)$, calcula el perímetro del cuadrilátero que determinan y el ángulo que forman los vectores $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$.**

$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{20}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overrightarrow{CD}\right| = 5$, $\left|\overrightarrow{DA}\right| = \sqrt{20}$, $P = 5\sqrt{5} + 5$

$\cos\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\right) = 1$, por lo tanto, $\alpha = 0°$, son vectores paralelos.

23 **Dados $\vec{a} = (2x, 5)$ y $\vec{b} = (7, y)$, averigua los valores de x e y sabiendo que $\vec{a}$ se encuentra en el primer cuadrante, $|\vec{a}| = 5\sqrt{5}$, y los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares.**

Del módulo del vector $\vec{a}$ se deduce lo siguiente:

$$4x^2 + 25 = 125 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow \vec{a} = (10, 5)$$

Si ambos vectores son perpendiculares:

$(10, 5)\cdot(7, y) = 0 \Rightarrow 70 + 5y = 0 \Rightarrow y = -14 \Rightarrow \vec{b} = (7, -14)$

24 **Sabiendo que el vector $\vec{a} = (x, y)$ es perpendicular a $\vec{b} = (-3, 2)$ y que el módulo de $\vec{a}$ es $2\sqrt{13}$, halla el valor de x e y.**

Del módulo se deduce que: $x^2 + y^2 = 52$

Puesto que $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, $-3x + 2y = 0$.

Resolviendo el sistema formado por ambas ecuaciones, se obtiene que $\vec{a} = (4, 6)$ $\vec{a} = (-4, 6)$.

25 **Calcula a sabiendo que $\vec{u} = (a, 3)$ y $\vec{v} = \left(\sqrt{2}, 1\right)$ forman un ángulo de 30°.**

$$\sqrt{3}/2 = \frac{\sqrt{2}a + 3}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2+9}} \Rightarrow a^2 - 24\sqrt{2}a + 45 = 0$$

$\Rightarrow a = 12\sqrt{2} + 9\sqrt{3}, a = 12\sqrt{2} - 9\sqrt{3}$

26 **Si $|\vec{a}| = 2$ y $|\vec{b}| = 3$, y $\vec{a}$ y $\vec{b}$ son perpendiculares, halla $|\vec{a} + \vec{b}|$ y $|\vec{a} - \vec{b}|$.**

Tomando $\vec{a} = (x, y)$ y $\vec{b} = (z, t)$, tenemos lo siguiente:

- $x^2 + y^2 = 4$
- $z^2 + t^2 = 9$
- $xz + yt = 0$

El módulo de $\vec{a} + \vec{b}$:

$$\sqrt{(x+z)^2 + (y+t)^2} = \sqrt{4 + 9 + 2(xz + yt)} = \sqrt{13}$$

El módulo de $\vec{a} - \vec{b}$:

$$\sqrt{(x-z)^2 + (y-t)^2} = \sqrt{4 + 9 - 2(xz + yt)} = \sqrt{13}$$

27 **Sabiendo que $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tienen el mismo módulo y que $\vec{u} = (3x, y)$ y $\vec{v} = (2, -1)$, calcula el ángulo que forman los vectores $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$.**

El módulo es $\sqrt{5}$, luego: $9x^2 + y^2 = -5 = 0$

$$\cos\alpha = \frac{(3x+2, y-1)(3x-2, y+1)}{\sqrt{(3x+2)^2 + (y-1)^2}\sqrt{(3x-2)^2 + (y+1)^2}} =$$

$$= \frac{9x^2 + y^2 - 5}{\sqrt{(3x+2)^2 + (y-1)^2}\sqrt{(3x-2)^2 + (y+1)^2}} = 0$$

Por tanto, $\vec{u} + \vec{v}$ y $\vec{u} - \vec{v}$ son perpendiculares, el ángulo que forman es 90°.

28 **Dados los vectores $\vec{v} = (7, 4)$ y $\vec{w} = (4, x)$, calcula x para que estos:**

a) **Sean perpendiculares.**

b) **Sean paralelos.**

c) **Formen un ángulo de 30°.**

a) $x = -7$

b) $x = \dfrac{16}{7}$

c) Para resolver este apartado hace falta saber resolver una ecuación irracional.

Se obtienen dos soluciones: $x = 6{,}86$ y $x = -0{,}02$

29 **Halla la proyección ortogonal del vector $\vec{u} = (2, -1)$ sobre el vector $\vec{v} = (-3, 7)$.**

Aplicando la definición de proyección ortogonal de un vector $\vec{u}$ sobre otro $\vec{v}$, tenemos:

$$proy_{\vec{v}}(\vec{u}) = \frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|} = \frac{|-6-7|}{\sqrt{9+49}} = \frac{13}{\sqrt{58}}$$

30 **Dado el vector $\vec{u} = (-3, 6)$, determina el módulo del producto escalar de $\vec{u}$ por $\vec{v}$, si sabemos que la proyección de $\vec{v}$ sobre $\vec{u}$ es 3.**

Aplicando la definición de proyección de un vector sobre otro, tenemos que:

$$|\vec{u}\cdot\vec{v}| = 3\cdot\sqrt{9+36} = 9\sqrt{5}$$

31 **Dados los puntos $A(7, 0)$, $B(4, 6)$ y $C(-1, -1)$, calcula las proyecciones de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CB}$ sobre $\overrightarrow{AC}$ y comprueba que la suma de ambas es igual al módulo de $\overrightarrow{AC}$.**

$\overrightarrow{AB} = (-3, 6)$, $\overrightarrow{AC} = (-8, -1)$, $p_1 = proy_{\overrightarrow{AC}}(\overrightarrow{AB}) = \dfrac{18}{\sqrt{65}}$

$\overrightarrow{CB} = (5, 7)$, $\overrightarrow{CA} = (8, 1)$, $p_2 = proy_{\overrightarrow{CA}}(\overrightarrow{CB}) = \dfrac{47}{\sqrt{65}}$

$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{65}, p_1 + p_2 = \dfrac{18}{\sqrt{65}} + \dfrac{47}{\sqrt{65}} = \sqrt{65}$

Aplicaciones de los vectores

32 **Dado el triángulo cuyos vértices son $A(-1, 0)$, $B(3, 3)$ y $C(1, -2)$, calcula:**

a) **La longitud del lado AB.** ***c)*** **El ángulo A.**

b) **La longitud del lado AC.** ***d)*** **El área del triángulo.**

a) $|\overrightarrow{AB}| = 5$ u

b) $|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{2}$ u

c) $\cos A = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{(4, 3) \cdot (2, -2)}{5 \cdot 2\sqrt{2}} = \dfrac{1}{5\sqrt{2}}$

$\Rightarrow A = 81° \, 52' \, 11{,}63''$

d) Área $= \dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \text{sen } A}{2} = 7 \text{ u}^2$

33 **Dado el triángulo de vértices $A(-3, 7)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 15)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.**

Tomando como base la longitud del lado AB, la altura es el producto del lado AC por el seno del ángulo A.

Primero calculamos el ángulo A:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(8, -1) \cdot (1, 8)}{\sqrt{65} \cdot \sqrt{65}} = 0 \Rightarrow A = 90°$$

Por tanto el área será: $\dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|}{2} = 32{,}5 \text{ u}^2$

34 **Dado el triángulo de vértices $A(-1, -1)$, $B(-3, 5)$ y $C(1, 3)$, calcula el valor de su área y el ángulo A.**

Tomando como base la longitud del lado AB, la altura es el producto del lado AC por el seno del ángulo A.

Primero calculamos el ángulo A:

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}|} = \frac{(-2, 6) \cdot (2, 4)}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow A = 45°$$

Por tanto el área será: $\dfrac{|\overrightarrow{AB}| \cdot |\overrightarrow{AC}| \cdot \text{sen } A}{2} = 10 \text{ u}^2$

Ecuaciones de la recta

35 **Determina si los siguientes puntos están alineados y, en el caso de que lo estén, averigua la ecuación de la recta a la que pertenecen.**

a) **$A(1, 6)$, $B(-2, 0)$ y $C(1/2, 5)$**

b) **$A(1, 2)$, $B(-3, 3)$ y $C(-1, 4)$**

a) A, B y C están alineados, puesto que pertenecen a la misma recta $2x - y + 4 = 0$.

b) No están alineados, puesto que el punto C no pertenece a la recta que pasa por A y B, $x + 4y - 9 = 0$.

36 **Calcula la ecuación de la recta que pasa por $A(3, 2)$ y $B(-6, 0)$. Exprésala de todas las formas posibles.**

Ecuación en forma vectorial: $(x, y) = (3, 2) + \lambda(9, 2)$

Ecuación en forma paramétrica: $\begin{cases} x = 3 + 9\lambda \\ y = 2 + 2\lambda \end{cases}$

Ecuación en forma continua: $\dfrac{x - 3}{9} = \dfrac{y - 2}{2}$

Ecuación en forma general: $2x - 9y + 12 = 0$

Ecuación explícita: $y = \dfrac{2}{9x} + \dfrac{4}{3}$

37 **¿Qué podrías decir acerca de una recta cuyo vector director es $(1, 1)$?**

Su pendiente vale 1 y por tanto forma un ángulo de 45° con el semieje positivo de abscisas. Es la bisectriz del ángulo que forman los ejes de coordenadas.

38 **Si $A(2, 7)$, $B(8, -3)$ y $C(0, -10)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo, determina las coordenadas del vértice D. A continuación, averigua las del punto en el que se cortan sus diagonales.**

$D(-6, 0)$. El punto de corte de sus diagonales es: $M\left(1, -\dfrac{3}{2}\right)$

39 **Los puntos $A(0, -2)$, $B(6, 0)$ y $C(3, 4)$ son tres vértices de un paralelogramo. Calcula el cuarto vértice y las ecuaciones de sus diagonales.**

$D(-3, 2)$. Las ecuaciones de sus diagonales:

AC es $2x - y - 2 = 0$ y BD es $2x + 9y - 12 = 0$

40 **Dada la recta r: $\begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = a - 3t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, halla el valor de a para que $(-4, 7)$ pertenezca a r.**

Si $x = -4$, $t = -1$, por lo que: $7 = a + 3 \Rightarrow a = 4$

41 **Calcula b para que la recta $x + by - 7 = 0$ pase por el punto de intersección de estas rectas:**

$$r: (x, y) = (-7, 0) + \lambda(5, 1), \lambda \in \mathbb{R}$$

$$s: \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - 4 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

Trabajando en paramétricas o escribiendo las ecuaciones en forma general, se resuelve el sistema de r y s, y se obtiene que el punto de intersección es $(3, 2)$.

Este punto debe pertenecer a la recta $x + by - 7 = 0$, por tanto: $3 + 2b - 7 = 0 \Rightarrow b = 2$.

42 **Dados los puntos del plano $A(2, -1)$ y $B(0, 3)$ y la recta r de ecuación $x + y - 2 = 0$, calcula las coordenadas de un punto C de la recta que esté alineado con A y B.**

C pertenece a r, por tanto, las coordenadas son $C(x, 2 - x)$. Si está alineado con A y con B, cumple lo siguiente:

$$(-2, 4) = k(x - 2, 2 - x + 1) \Rightarrow \frac{-2}{x - 2} = \frac{4}{3 - x} \Rightarrow x = 1$$

Por tanto, el punto C tiene las siguientes coordenadas: $C(1, 1)$

Posiciones relativas de rectas

43 **Calcula la ecuación de una recta paralela a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma vectorial y paramétrica.**

En forma vectorial: $(x, y) = (-1, 5) + \lambda(2, 3)$

En forma paramétrica: $\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 5 + 3\lambda \end{cases}$

44 **Sean r y s las dos rectas del plano de ecuaciones:**

$$r: 2x - y - 3 = 0$$

$$s: \frac{x + 1}{4} = \frac{y + 2}{2}$$

Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto de intersección de r y s, y es paralela a la recta de ecuación que pasa por los puntos $(2, -1)$ y $(-3, 2)$.

Se resuelve el sistema formado por las rectas r y s y obtenemos el punto de intersección $P(1, -1)$.

Una recta paralela a la dada será de la forma $3x + 5y + C = 0$. Imponemos que contenga el punto P:

$$3 \cdot 1 + 5 \cdot (-1) + C = 0 \Rightarrow C = 2$$

Por lo que la recta buscada es: $3x + 5y + 2 = 0$

45 **Calcula la ecuación de la recta perpendicular a la de ecuación $3x - 2y + 5 = 0$ que pase por el punto $P(-1, 5)$. Exprésala en forma continua y explícita.**

En forma continua: $\dfrac{x + 1}{-3} = \dfrac{y - 5}{2}$

En forma explícita: $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{13}{3}$

46 **Considera la recta de ecuación $y = -7x + 5$. Encuentra las coordenadas del punto de intersección de esta recta con la recta perpendicular a ella que pasa por $(-7, 5)$.**

Una recta perpendicular es de la forma: $y = \frac{1}{7}x + b$

Debe pasar por el punto $(-7, 5)$, por tanto:

$$5 = \frac{1}{7} \cdot (-7) + b \Rightarrow b = 6$$

Luego la recta perpendicular es $y = \frac{1}{7}x + 6$.

El punto de intersección se calcula resolviendo este sistema:

$$\begin{cases} y = -7x + 5 \\ y = \frac{x}{7} + 6 \end{cases} \Rightarrow -7x + 5 = \frac{x}{7} + 6$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{50}, y = \frac{299}{50}$$

El punto es $P\left(-\frac{7}{50}, \frac{299}{50}\right)$.

47 **Dadas las siguientes rectas:**

$$r\colon\ 5x - y + 4 = 0$$

$$s\colon \begin{cases} x = -3 + m\lambda \\ y = 4 - \lambda \end{cases}, \text{ con } \lambda \in \mathbb{R}$$

determina el valor de *m* para que las rectas *r* y *s* sean:

a) **Paralelas.**

b) **Perpendiculares.**

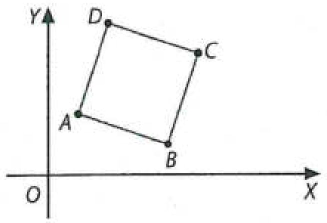
c) **Coincidentes.**

a) $m = -\frac{1}{5}$

b) $m = 5$

c) No pueden ser coincidentes.

48 **Los puntos $A(1, 2)$ y $C(5, 4)$ representan los vértices opuestos de un cuadrado:**



a) **Calcula el punto medio, *M*, de la diagonal, *AC*, del cuadrado (*M* será el centro del cuadrado).**

b) **Escribe la ecuación de la recta que pasa por *M* y es perpendicular a la diagonal *AC*.**

c) **Calcula las coordenadas de los otros dos vértices *B* y *D* del cuadrado.**

a) $M(3, 3)$

b) $\overrightarrow{AC} = (4, 2)$, luego la recta es de la forma: $4x + 2y + C = 0$

Como contiene al punto $M(3, 3)$ debe cumplir:

$$4 \cdot 3 + 2 \cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = -18$$

La recta pedida es $4x + 2y - 18 = 0 \Rightarrow 2x + y - 9 = 0$.

c) El vector $\overrightarrow{AM} = (2, 1)$. Dos vectores perpendiculares y del mismo módulo son:

$$\vec{u} = (-1, 2) \text{ y } \vec{v} = (1, -2)$$

Luego los puntos *B* y *D* son:

$$(3 - 1, 3 + 2) = (2, 5) \text{ y } (3 + 1, 3 - 2) = (4, 1)$$

En concreto, $B(4, 1)$ y $D(2, 5)$, porque *B* debe estar a la derecha y hacia abajo respecto de *M*.

49 **Explica la condición que han de verificar *A* y *B* si las rectas $Ax + By + C = 0$ y $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3}$:**

a) **Son perpendiculares.** ***b)*** **Son paralelas.**

a) $-2B + 3A = 0$ *b)* $A/3 = -B/2$

50 **Sea *r* la recta de ecuación $3x - 5y + 2 = 0$. Determina las ecuaciones de las rectas paralela y perpendicular a *r* que pasen por el punto $(-15, 4)$.**

Paralela: $3x - 5y + 65 = 0$; perpendicular: $5x + 3y + 63 = 0$

51 **Dada la recta de ecuación $3x - 5y + 7 = 0$, determina la ecuación de la recta perpendicular que corta el eje de ordenadas en $y = 3$.**

Una perpendicular tendrá por ecuación $5x + 3y + C = 0$.

Debe pasar por $(0, 3)$, es decir:

$$5 \cdot 0 + 3 \cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = -9$$

La recta buscada es $5x + 3y - 9 = 0$.

52 **Determina el valor de *a* para que las rectas de ecuaciones $x - 5ay = 1$ y $2x + 3y = 1$ sean:**

a) **Paralelas.** ***b)*** **Perpendiculares.**

a) $\frac{1}{2} = \frac{-5a}{3} \Rightarrow a = \frac{-3}{10}$

b) $1 \cdot 2 + (-5a) \cdot 3 = 0 \Rightarrow a = 2/15$

53 **Determina el valor de *m* para que $r\colon x - y + 4 = 0$ y $s\colon \begin{cases} x = 3 + m\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$ sean:**

a) **Paralelas.** ***b)*** **Perpendiculares.**

$$\vec{v}_r = (1, 1) \text{ y } \vec{v}_s = (m, -4)$$

a) Si son paralelas: $(1, 1) = k(m, -4) \Rightarrow \frac{1}{m} = \frac{1}{-4} \Rightarrow m = -4$

b) Si son perpendiculares: $(1, 1) \cdot (m, -4) = 0 \Rightarrow m = 4$

54 **Dadas $r\colon 2x + my - 7 = 0$ y $s\colon \begin{cases} x = -3 + 5\lambda \\ y = 7 + n\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$, sabiendo que *s* pasa por $P(13, 8)$, determina *m* y *n* en los siguientes casos:**

a) **Si *r* y *s* son paralelas.**

b) **Si *r* y *s* son perpendiculares.**

Si $P(13, 8)$ pertenece a *s*: $13 = -3 + 5\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{16}{5}$

Entonces: $8 = 7 + n\frac{16}{5} \Rightarrow n = \frac{5}{16}$

Un vector director de *s* es $(16, 1)$ y un vector director de *r* es $(-m, 2)$:

a) *r* y *s* son paralelas si: $\frac{-m}{16} = \frac{2}{1} \Rightarrow m = -32$

b) *r* y *s* son perpendiculares si: $(-m, 2) \cdot (16, 1) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{8}$

55 **De un rombo *ABCD* conocemos las coordenadas de tres vértices: *A* es el origen de coordenadas, $B(4, 1)$ y $D(1, 4)$.**

a) **Calcula las coordenadas del cuarto vértice, *C*.**

b) **Comprueba, analíticamente, que las diagonales son perpendiculares y que se cortan en su punto medio.**

a) $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} \Rightarrow (1, 4) = (x - 4, y - 1) \Rightarrow x = 5, y = 5$, luego $C(5, 5)$.

b) $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = (5, 5) \cdot (-3, 3) = -15 + 15 = 0$, luego las diagonales son perpendiculares.

El punto medio de una de las diagonales es: $M(5/2, 5/2)$

Comprobamos que las rectas que contienen A y C y B y D, se cortan en el mismo punto:

Recta que pasa por A y C: $y = x$

Recta que pasa por B y D: $x + y = 5$

El punto de intersección es la solución de este sistema:

$$\begin{cases} y = x \\ x + y = 5 \end{cases} \Rightarrow P(5/2, 5/2)$$

56 **Calcula las coordenadas del punto simétrico de $A(1/6, 1)$ respecto del punto $P(1, -4)$.**

$$A'\left(\frac{11}{6}, -9\right)$$

57 **Halla las coordenadas del punto simétrico al punto $P(2, 2)$ respecto de la recta $x - 2y - 5 = 0$.**

Recta perpendicular a la dada que pasa por (2, 2):

$$2x + y - 6 = 0$$

Punto de intersección de las dos rectas: $\left(\frac{17}{5}, \frac{-4}{5}\right)$

El punto de intersección es el punto medio entre (2, 2) y su simétrico, por tanto, el simétrico buscado es:

$$\left(\frac{24}{5}, \frac{-18}{5}\right)$$

58 **Calcula el punto simétrico de $A(0, 4)$ respecto de la recta $3x - y + 1 = 0$.**

Primero calculemos la proyección ortogonal de A sobre la recta r. Para ello necesitamos calcular la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.

Una perpendicular cualquiera es de la forma $x + 3y + C = 0$. Imponemos que contenga el punto A:

$$1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + C = 0 \Rightarrow C = -12$$

Por tanto, la recta buscada perpendicular a r que pasa por A es $x + 3y - 12 = 0$.

Ahora buscamos la proyección de A sobre r resolviendo el sistema y obtenemos $A(9/10, 37/10)$.

Esta proyección es el punto medio entre A y su simétrico, por tanto podemos escribir:

$$\frac{9}{10} = \frac{0 + x}{2} \Rightarrow x = \frac{9}{5}; \ \frac{37}{10} = \frac{4 + y}{2} \Rightarrow y = \frac{17}{5}$$

El punto simétrico es $A'(9/5, 17/5)$.

59 **Calcula el punto simétrico de $A(-2, -1)$ respecto de la recta r: $\begin{cases} x = 3t \\ y = 7 - 5t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$.**

Primero calculemos la proyección ortogonal de A sobre la recta r. Para ello necesitamos calcular la ecuación de la recta perpendicular a r que pasa por A.

Una perpendicular cualquiera es de la forma $3x - 5y + C = 0$. Como un vector director de r es $(3, -5)$, imponemos que contenga el punto A: $3 \cdot (-2) - 5 \cdot (-1) + C = 0 \Rightarrow C = 1$

Por tanto, la recta buscada perpendicular a r que pasa por A es $3x - 5y + 1 = 0$.

Ahora buscamos la proyección de A sobre r resolviendo el sistema y obtenemos $A(3, 2)$.

Esta proyección es el punto medio entre A y su simétrico, por tanto podemos escribir:

$$3 = \frac{-2 + x}{2} \Rightarrow x = 8; \ 2 = \frac{-1 + y}{2} \Rightarrow y = 5$$

El punto simétrico es $A'(8, 5)$.

60 **Determina la ecuación de la recta simétrica de $r: x + y - 1 = 0$ respecto de la recta $s: x - 2y + 3 = 0$.**

La recta r y su simétrica respecto a s tienen un punto en común: el de su intersección.

Si resolvemos el sistema de r y s se obtiene:

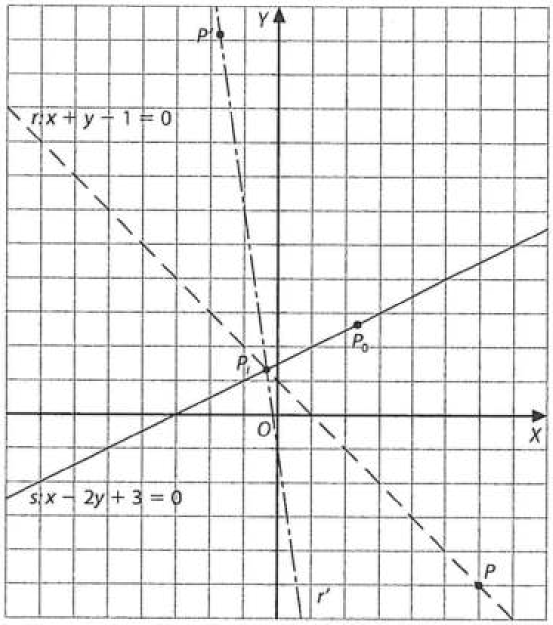
$$P_i = (-1/3, 4/3)$$

Otro punto de r' será el simétrico de uno de r respecto a s.

Un punto de r es (0, 1). La recta t perpendicular a s que pasa por (0, 1) es $t: 2x + y - 1 = 0$.

El punto de intersección de s y t es $P_0\left(\frac{-1}{5}, \frac{7}{5}\right)$.

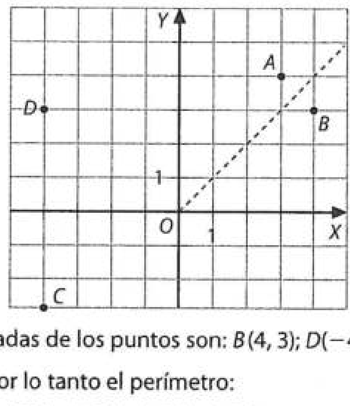
Con estos datos, el punto de r' buscado es: $\left(\frac{-2}{5}, \frac{9}{5}\right)$



Con dos puntos se puede deducir la ecuación de r', que es: $7x + y + 1 = 0$.

Distancias y áreas

61 **Halla el perímetro del cuadrilátero $ABCD$ si $A = (3, 4)$; B es el punto simétrico de A respecto de la bisectriz del primer cuadrante; C, el simétrico de B respecto del eje de ordenadas, y D, el simétrico de C respecto del eje de abscisas.**

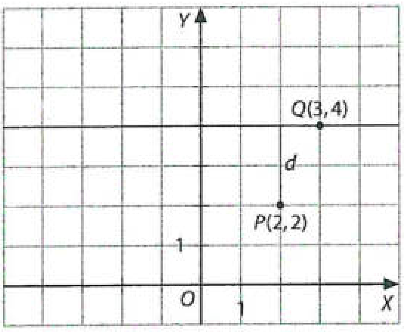


Las coordenadas de los puntos son: $B(4, 3)$; $D(-4, 3)$ y $C(-4, -3)$, por lo tanto el perímetro:

$$P = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BD}| + |\overrightarrow{DC}| + |\overrightarrow{CA}| = 16 + 6\sqrt{2} \text{ u}$$

62 **Halla la distancia del punto $P(2, 2)$ a la recta paralela al eje de abscisas que pasa por el punto $Q(3, 4)$.**

Observa la representación gráfica:



Por tanto la distancia es $d = 2$.

63 **Considera el triángulo formado por las rectas de ecuaciones $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y el eje de coordenadas. Calcula su perímetro y su área.**

Los vértices del triángulo son los puntos de intersección de las tres rectas: $2x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 8 = 0$ y $x = 0$, que son: $A(0, 4)$, $B(0, -1)$ y $C(2, 3)$.

Por tanto, el perímetro es:

$$|\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}| = 5 + \sqrt{5} + \sqrt{20} = 5 + 3\sqrt{5}\text{ u}$$

Para calcular el área, tomamos $|\overrightarrow{AB}|$ como base y entonces la altura vale 2 unidades, por lo que:

Área $= 5\text{ u}^2$

64 **Calcula la distancia entre las rectas:**

$4x - 3y + 7 = 0$ $\qquad$ $8x - 6y = 0$

Son rectas paralelas porque los coeficientes A y B de las dos rectas son proporcionales. Con un punto de la segunda, por ejemplo, $O(0, 0)$, calculamos la distancia a la primera recta:

$$d(O, r) = \frac{|4 \cdot 0 - 3 \cdot 0 + 7|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{7}{5} = 1{,}4\text{ u}$$

65 **Determina, sin efectuar cálculos, la distancia entre las rectas:**

$3x + 2y - 5 = 0$
$2x - 5y + 1 = 0$

Como los vectores directores de las rectas no son proporcionales, podemos asegurar que no son rectas paralelas, por tanto son secantes y su distancia es cero.

66 **Dadas las rectas $ax + (a + 2)y = a + 2$ y $x + ay = 3$, donde a es un parámetro.**

a) **Calcula un vector director de cada una de estas rectas.**

b) **Halla los valores de a para los que las rectas son paralelas.**

c) **Calcula los valores de a para los cuales las rectas son perpendiculares.**

d) **Calcula la distancia que hay entre las dos rectas cuando $a = 2$.**

a) $\vec{v}_r = (-a - 2, a)$ y $\vec{v}_s = (-a, 1)$

b) Las rectas son paralelas si sus vectores son proporcionales:

$$\frac{-a-2}{-a} = \frac{a}{1} \Rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \Rightarrow a = 2, a = -1$$

c) Las rectas son perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es cero:

$$(-a - 2, a) \cdot (-a, 1) = 0 \Rightarrow a^2 + 3a = 0 \Rightarrow a = 0, a = -3$$

d) Si $a = 2$, las dos rectas que quedan son:

- r: $x + 2y = 2$
- s: $x + 2y = 3$

Son paralelas, por eso tomamos el punto $(0, 1)$ de la recta r y calculamos la distancia de este punto a la recta s, que será la distancia entre las dos rectas:

$$d(r, s) = \frac{|0 + 2 \cdot 1 - 3|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}\text{ u}$$

67 **Considera la recta de ecuación $y = -2x + 2$.**

a) **Averigua las coordenadas del punto de intersección de esta recta con su recta perpendicular que pasa por $(6, 3)$.**

b) **Halla la ecuación de la paralela que contiene $(3, 5)$.**

c) **Calcula la distancia entre las dos rectas paralelas.**

a) Una recta perpendicular es de la forma: $y = (1/2)x + b$

Debe pasar por $(6, 3)$, por tanto: $3 = (1/2) \cdot 6 + b \Rightarrow b = 0$

Luego la recta perpendicular es $y = \frac{1}{2}x$.

El punto de intersección es la solución de este sistema:

$$\begin{cases} y = -2x + 2 \\ y = x/2 \end{cases} \Rightarrow x = \frac{4}{5}, y = \frac{2}{5}$$

El punto es $P(4/5, 2/5)$.

b) Una recta paralela es de la forma: $y = -2x + b$

Debe pasar por $(3, 5)$: $5 = -2 \cdot 3 + b \Rightarrow b = 11$

Luego la recta paralela es $y = -2x + 11$

c) La distancia es $9/\sqrt{5}$ u

68 **Determina si es equilátero, isósceles o rectángulo el triángulo cuyos vértices son $A(2, 2)$, $B(5, 6)$ y $C(-2, 5)$. Averigua el valor de la altura correspondiente al vértice A y utilízalo para calcular el área del triángulo.**

Como $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$ y $\overrightarrow{AC} = (-4, 3)$, el triángulo es rectángulo en A. La longitud correspondiente a estos lados es 5 u. Por tanto, es isósceles.

Como $\overrightarrow{BC} = (-7, -1)$, la recta perpendicular a $\overrightarrow{BC}$ que pasa por A es: $7x + y - 16 = 0$. La proyección ortogonal de A sobre esta recta es el punto de intersección de esta recta con la que pasa por BC, es decir, $x - 7y + 37 = 0$.

Este punto es: $A_0(3/2, 11/2)$

La longitud de la altura es el módulo del vector $\overrightarrow{AA_0}$: $h = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$

El área del triángulo será: $\dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AA_0}|}{2} = 12{,}5\text{ u}^2$

69 **Calcula la distancia entre estas rectas.**

$$r\text{: } 4x - 2y + 10 = 0 \qquad s\text{: } 4x - 2y - 10 = 0$$

Un punto de una de ellas es $P(0, 5)$, puesto que son paralelas:

$$d = \left|\frac{4 \cdot 0 - 2 \cdot 5 - 10}{\sqrt{16 + 4}}\right| = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}\text{ u}$$

70 **Sabiendo que $3x + ay - 5a = 0$ y $-bx + 3y + 3b = 0$ son perpendiculares y sus ordenadas en el origen están a 4 unidades de distancia, calcula a y b.**

Primero debe cumplirse $(-a, 3) \cdot (3, b) = 0 \Rightarrow -a + b = 0$.

Si $x = 0$, en la primera recta $y = 5$, y en la segunda, $y = -b$.

Debe cumplirse: $|5 - (-b)| = 4$; es decir, $5 + b = 4 \Rightarrow b = -1$ y $5 + b = -4 \Rightarrow b = -9$. Por tanto:

- Si $b = -1 \Rightarrow a = -1$
- Si $b = -9 \Rightarrow a = -9$

71 **Averigua qué punto, $P(x, y)$, del plano dista $5\sqrt{2}$ u de $Q(4, 1)$ y cumple lo siguiente:**

- **$x > y$**
- **$|y| = 2|x|$**
- **$x > 0$**

La ordenada debe ser negativa y en valor absoluto el doble que la abscisa, por tanto $P(x, -2x)$.

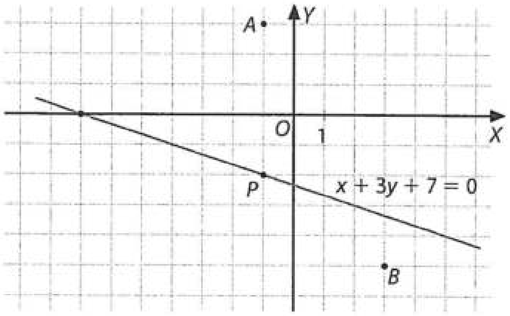
Deberá cumplir:

$$(x - 4)^2 + (-2x - 1)^2 = 50 \Rightarrow 5x^2 - 4x - 33 = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -11/5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 22/5 \end{cases}$$

Solo cumple el enunciado la solución $x = 3, y = -6$.

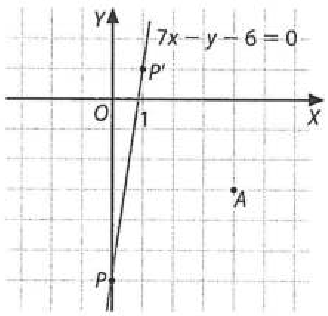
72 **Un punto de la recta r: $x + 3y + 7 = 0$ equidista de los puntos $A(-1, 3)$ y $B(3, -5)$. Calcúlalo.**



El punto de la recta será: $P\,(x, (x + 7)/(-3))$

Aplicando la expresión de distancia entre dos puntos e igualando, se obtiene $d(A, P) = d(B, P)$ que a su vez: $120x = -120$, es decir, $x = -1$, y sustituyendo $y = -2$, luego $P(-1, -2)$.

73 **El punto $A(4, -3)$ dista 5 unidades de dos puntos de la recta $7x - y - 6 = 0$; halla las coordenadas de los puntos.**



Los puntos de la recta son de la forma $(x, 7x - 6)$, por tanto, los puntos que distan 5 unidades de A son aquellos que cumplen que: $(x - 4)^2 + (7x - 6 + 3)^2 = 5^2$

Operando, se obtiene la ecuación $50x(x - 1) = 0$, cuyas soluciones son $x = 0$ y $x = 1$. Los puntos son: $P(0, -6)$ y $P'(1, 1)$

74 **Determina los puntos de la recta $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = 2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, que distan $\sqrt{10}$ u de $y = 3x + 1$.**

Podemos sustituir en la fórmula que permite hallar la distancia de un punto $(3 - t, 2t)$ a una recta, $3x - y + 1 = 0$:

$$\sqrt{10} = \frac{|3(3-t) - 2t + 1|}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ t = 4 \end{cases}$$

Por lo que los puntos son:

- Si $t = 0 \Rightarrow (3, 0)$
- Si $t = 4 \Rightarrow (-1, 8)$

75 **Halla el punto de la recta $2x + 3y - 5 = 0$ que equidista de $A(0, 3)$ y $B(-1, 4)$.**

El punto es de la forma $\left(x, \dfrac{-2x + 5}{3}\right)$. Se debe cumplir que:

$$x^2 + \left(\frac{-2x + 5}{3} - 3\right)^2 = (x + 1)^2 + \left(\frac{-2x + 5}{3} - 4\right)^2$$

$$\Rightarrow x = -\frac{7}{5}, y = \frac{13}{5}$$

Por tanto, el punto buscado es $(-7/5, 13/5)$.

76 **Averigua los puntos de la recta $-8x + y - 1 = 0$ que están a distancia $2\sqrt{2}$ u del punto $A(2, 3)$.**

Los puntos de la recta son de la forma $(x, 8x + 1)$. Por tanto:

$$(x - 2)^2 + (8x - 2)^2 = 8 \Rightarrow 65x^2 - 6x = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 36/65 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 353/65 \end{cases}$$

Los puntos de la recta que están a distancia $2\sqrt{2}$ u del punto $A(2, 3)$ son $(0, 1)$ y $(36/65, 353/65)$.

77 **Encuentra las coordenadas de los puntos situados en la recta r: $x + 2y - 3 = 0$ que distan dos unidades de la recta s: $4x - 3y + 9 = 0$.**

P y P' son de la forma $\left(x, \dfrac{3 - x}{2}\right)$.

La distancia de uno cualquiera de ellos a s es 2, por lo que:

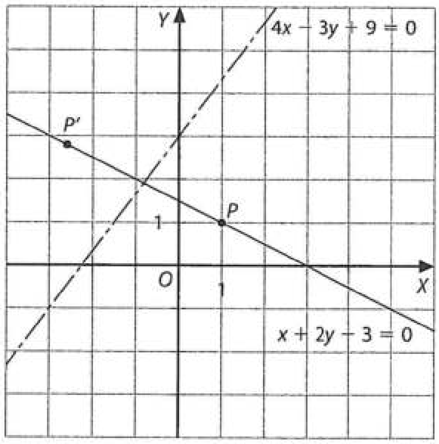
$$2 = \frac{|4x - 3y + 9|}{5}$$

Como $y = 3 - \dfrac{x}{2}$, tenemos que:

$$\left|4x - 3\cdot\left(\frac{3x - 2}{2}\right) + 9\right| = 10 \Rightarrow |11x + 9| = 20$$

Las soluciones de esta ecuación son: $x = 1$ y $x = -29/11$. Sustituyendo en la ecuación irracional, ambas son válidas, por lo que solo falta calcular las ordenadas de los puntos P y P'.

Se obtiene: $P(1, 1)$ y $P'\left(\dfrac{-29}{11}, \dfrac{31}{11}\right)$



78 **De todas las rectas que pasan por el punto $P(2, 1)$, halla las que distan una unidad del origen.**

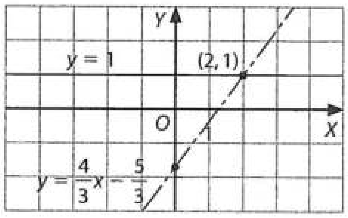
Las rectas que pasan por el punto $(2, 1)$ son de la forma: $y - 1 = m\,(x - 2)$, es decir, $mx - y + (1 - 2m) = 0$.

Podemos hallar las dos rectas que pasan por el punto $(2, 1)$ y distan una unidad del origen, a partir de la expresión que proporciona la distancia de una recta a un punto:

$$1 = \left|\frac{m\cdot 0 - 0 + (1 - 2m)}{\sqrt{m^2 + 1}}\right| \Rightarrow \sqrt{m^2 + 1} = |1 - 2m|$$

Al resolver esta ecuación irracional, se obtiene $m = 0$ y $m = 4/3$, por lo que las dos rectas buscadas son:

$$y = 1 \text{ e } y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$



79 **Averigua las ecuaciones de las rectas que pasan por $(-2, 4)$ y distan 3 unidades del punto $(-1, 7)$.**

Las rectas que pasan por $(-2, 4)$, son de la siguiente forma: $y - 4 = m(x + 2)$, es decir, $mx - y + 2m + 4 = 0$.

Por tanto, se puede escribir:

$$3 = \frac{|m(-1) - 7 + 2m + 4|}{\sqrt{m^2 + 1}} \Rightarrow 8m^2 + 6m = 0 \Rightarrow \begin{cases} m = 0 \\ m = 3/4 \end{cases}$$

Es decir, las rectas serán:

- Si $m = 0 \Rightarrow y = 4$
- Si $m = 3/4 \Rightarrow 3x - 4y + 22 = 0$

80 **Determina las ecuaciones de las rectas que distan 7 unidades del punto $P(3, 5)$ y son perpendiculares a la recta cuya ecuación es $3x - 4y + 6 = 0$.**

Hay dos rectas que cumplen las condiciones del enunciado.

Si son perpendiculares a $3x - 4y + 6 = 0$, son de la forma: $4x + 3y + C = 0$.

Si distan 7 unidades del punto $(3, 5)$, deben cumplir:

$$7 = \frac{|4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + C|}{\sqrt{16 + 9}} \Rightarrow 35 = |27 + C| \Rightarrow C = 8 \text{ y } C = -62$$

Las dos rectas son: $4x + 3y + 8 = 0$ y $4x + 3y - 62 = 0$.

81 **En el triángulo de vértices $A(0, 3)$, $B(3, 7)$ y $C(6, 0)$, determina:**

a) **El perímetro.**

b) **La ecuación de la recta perpendicular a BC que pasa por A, es decir, la altura del triángulo desde el vértice A.**

c) **La distancia del punto A a la recta que contiene el segmento BC.**

d) **El área.**

a) Lado $AB = 5$ u; lado $BC = \sqrt{58}$ u; lado $AC = 3\sqrt{5}$ u; Perímetro $= 19{,}32$ u.

b) La recta que contiene a $A(0, 3)$ y es perpendicular al vector $\overrightarrow{BC} = (3, -7)$ es: $3x - 7y + 21 = 0$

c) La distancia de $A(0, 3)$ a la recta que contiene el segmento BC, $7x + 3y - 42 = 0$, es: $d = \dfrac{|7 \cdot 0 + 3 \cdot 3 - 42|}{\sqrt{49 + 9}} = \dfrac{33}{\sqrt{58}}$ u

d) $A = \dfrac{b \cdot h}{2} = \dfrac{|\overrightarrow{BC}| \cdot d}{2} = \dfrac{\sqrt{58} \cdot 33/\sqrt{58}}{2} = \dfrac{33}{2}$ u^2

Ángulos

82 **Encuentra las ecuaciones de las rectas que forman con el eje de abscisas un ángulo cuya tangente vale 3.**

$y = 3x + b$

83 **Determina, sin efectuar cálculos, el ángulo existente entre las rectas $3x - 2y - 5 = 0$ y $2x + 3y = 0$.**

El ángulo mide 90°, puesto que $AA' + BB' = 0$.

84 **Halla el ángulo que forman estas dos rectas:**

$$r: 3x - 5y + 10 = 0,\ s: \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 4 - 2t \end{cases},\ t \in \mathbb{R}$$

Aplicando la fórmula para el coseno del ángulo que forman los dos vectores directores, se obtiene $\alpha = 64°\ 39'\ 13{,}77''$.

85 **Averigua la ecuación de la mediatriz del segmento de extremos $A(-1/2, 5)$ y $B(7, -2)$ y determina el ángulo que forma con la recta $x = 5$.**

El punto medio del segmento es $M(13/4, 3/2)$.

El vector es $\overrightarrow{AB} = (15/2, -7)$, por lo que una perpendicular al segmento AB que pase por M es:

$$\frac{15}{2}x - 7y + C = 0$$

Imponiendo que pase por M:

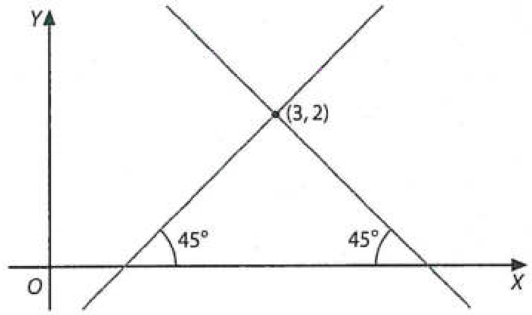
$$\frac{15}{2} \cdot \frac{13}{4} - 7 \cdot \frac{3}{2} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{111}{8}$$

La recta es: $\dfrac{15}{2}x - 7y + \dfrac{111}{8} = 0 \Rightarrow 60x - 56y + 111 = 0$

El ángulo que forma con la recta $x = 5$ es:

$$\cos \alpha = \frac{|(56, 60) \cdot (0, 1)|}{\sqrt{6736}} = \frac{60}{4\sqrt{421}} \Rightarrow \alpha = 43°\ 1'30{,}24''$$

86 **Escribe la ecuación de las dos rectas que pasan por el punto $(3, 2)$ y forman un ángulo de 45° con el eje OX:**



La recta de pendiente positiva será de la forma:

$$y = x + b$$

Imponiendo que pase por $(3, 2)$, tenemos:

$$2 = 3 + b \Rightarrow b = -1$$

Por tanto, esta recta tiene por ecuación $y = x - 1$.

La recta de pendiente negativa será de la forma:

$$y = -x + b$$

Como pasa por $(3, 2)$, tenemos: $2 = -3 + b \Rightarrow b = 5$

Por tanto, esta recta tiene por ecuación $y = -x + 5$.

87 **Determina la pendiente de las rectas que forman un ángulo de 60° con la recta de ecuación $-x + 2y = 4$.**

Un vector director de la recta es $\vec{u} = (2, 1)$ y un vector director $\vec{v} = (1, m)$ de otra que forme con ella 60° cumplirá:

$$\frac{1}{2} = \frac{|2 + m|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow |4 + 2m| = \sqrt{5 + 5m^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m' = 8 + 5\sqrt{3} = 16{,}66 \\ m = 8 - 5\sqrt{3} = -0{,}66 \end{cases}$$

88 **Escribe las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto de intersección de $x + 3y - 5 = 0$ y $-2x + y + 3 = 0$ y forman un ángulo de 45° con $2x - y - 1 = 0$.**

Un vector director de la recta $2x - y - 1 = 0$ es $\vec{u} = (1, 2)$ y un vector director $\vec{v} = (1, m)$ de una recta que forme con ella un ángulo de 45° cumplirá:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{|1 + 2m|}{\sqrt{5}\sqrt{1 + m^2}} \Rightarrow |2 + 4m| = \sqrt{10 + 10m^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Que verifican la primera ecuación.

Por otra parte, el punto de intersección de las dos rectas es la solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} x + 3y - 5 = 0 \\ -2x + y + 3 = 0 \end{cases}$$

Se cortan en el punto $P(2, 1)$, por lo que las rectas buscadas tienen por ecuación:

- $y - 1 = -3(x - 2) \Rightarrow 3x + y - 7 = 0$

■ $y - 1 = \frac{1}{3}(x - 2) \Rightarrow x - 3y + 1 = 0$

Ejercicios de aplicación

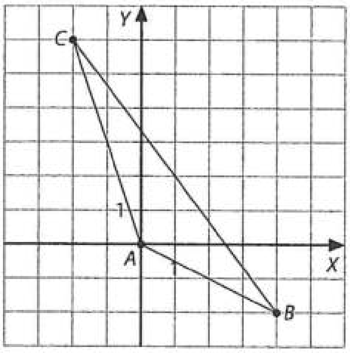
89 **Dado el triángulo de vértices $A(0, 0)$, $B(4, -2)$ y $C(-2, 6)$, calcula:**

a) **Su área.**

b) **El ángulo B.**

c) **La ecuación de la mediatriz del segmento AB.**

d) **El punto simétrico de C respecto de AB.**



a) Siguiendo el proceso de ejercicios anteriores se obtiene: Área $= 10$ u^2

b) $\cos B = \dfrac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}| \cdot |\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{(-4, 2) \cdot (-6, 8)}{\sqrt{20} \cdot 10}$

El ángulo buscado es, por tanto: $B = 26{,}57°$

Atención: Si se calcula primero B, podemos hacer:

$$\overrightarrow{AB} = (4, -2)$$

$h = |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{sen } B$, por lo que el área será:

$$A = |\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{AB}| \cdot \text{sen } B = 10 \text{ u}^2$$

c) La mediatriz del segmento AB es la perpendicular a AB por su punto medio. Por tanto, es de la forma $2x - y + C = 0$, como el punto medio de AB es $(2, -1)$, $C = -5$. La ecuación pedida es la siguiente:

$$2x - y - 5 = 0$$

d) Calculando la proyección ortogonal de C sobre AB se obtiene $C_0(-4, 2)$, por lo que $C'(-6, -2)$.

90 **Halla el área del triángulo determinado por:**

r: $y = -x$

s: $\begin{cases} x = 3 + k \\ y = -3 + 3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

t: $y = -\dfrac{x}{5} + \dfrac{4}{5}$

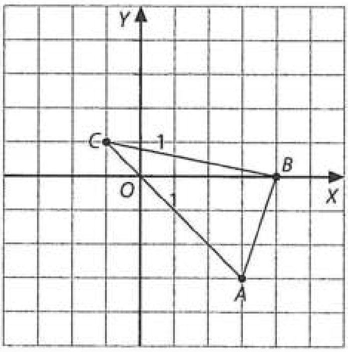
Los vértices de este triángulo son:

$A = r \cap s \Rightarrow A(3, -3)$

$C = r \cap t \Rightarrow C(-1, 1)$

$B = s \cap t \Rightarrow B(4, 0)$

Siguiendo el procedimiento aplicado ya anteriormente, el área vale 8 u^2.



También podemos calcular el ángulo B, y, a continuación, la altura del triángulo.

$$\cos B = \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} = \frac{(-5, 1) \cdot (-1, -3)}{\sqrt{26} \cdot \sqrt{10}} = \frac{2}{\sqrt{260}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \text{sen } B = \sqrt{1 - \frac{4}{260}} = 0{,}99$$

Como $h = |\overrightarrow{BC}| \cdot \text{sen } B = 5{,}06$ u, resulta que:

$$\text{Área} = \frac{b \cdot h}{2} = \frac{\sqrt{10} \cdot 5{,}06}{2} = 8 \text{ u}^2$$

91 **Considera los puntos $O(0, 0)$ y $A(9, 12)$. Una persona situada en el punto O viaja en línea recta hacia A.**

a) **¿Qué distancia recorre para ir de O hasta A?**

b) **Escribe la ecuación de la recta que sigue en este camino.**

c) **Cuando lleva la tercera parte de recorrido, ¿qué coordenadas serán las del punto P en que se encuentre?**

d) **Si cuando llega al punto P decide dirigirse hacia un punto Q de coordenadas $Q(7, 1)$, ¿qué ángulo deberá girar respecto de la trayectoria que seguía?**

a) La distancia entre O y A corresponde con el módulo del vector que une los puntos O y A:

$$d = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \ u$$

b) Como se conoce el punto $A(0, 0)$ y el vector $\overrightarrow{OA} = (9, 12)$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$r: \frac{x - 0}{9} = \frac{y - 0}{12} \Rightarrow 4x - 3y = 0$$

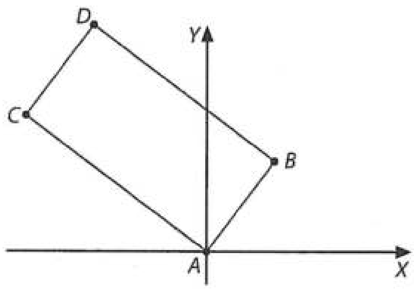
c) Dado que debe cumplirse esta relación entre vectores:

$$\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OA}$$

El punto P tiene por coordenadas $(3, 4)$.

d) El vector $\overrightarrow{PQ} = (4, -3)$, que indica la nueva dirección y el vector $\overrightarrow{OP} = (3, 4)$, que tiene la dirección inicial del trayecto son perpendiculares, porque su producto escalar es cero. Por tanto, el ángulo que indica el cambio de dirección es de $90°$.

92 **Considera el siguiente rectángulo del plano:**



a) **Si $A(0, 0)$ y $B(3, 4)$, calcula la longitud de AB.**

b) **Determina la ecuación de la recta que pasa por C y A.**

c) **Determina las coordenadas del vértice C sabiendo que la longitud del lado CA es doble de la de AB.**

d) **Calcula las coordenadas del vértice D.**

a) $|\overrightarrow{AB}| = 5$ u

b) La recta determinada por C y A es perpendicular al vector $\overrightarrow{AB} = (3, 4)$. Por tanto:

$$\vec{v}_{AC} \perp \overrightarrow{AB} \Rightarrow \vec{v}_{AC} = (-4, 3)$$

Como esta recta pasa por $(0, 0)$, tiene por ecuación:

$$3x + 4y = 0$$

c) Sobre la recta AC, un punto que esté a 10 unidades de distancia del origen ha de tener por coordenadas $(-8, 6)$. Es decir, $C(-8, 6)$.

d) Se ha de cumplir que: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; es decir, $D = (-5, 10)$.

93 El lado desigual de un triángulo isósceles mide $2\sqrt{2}$ u y está sobre $y = x$. El vértice opuesto es (0, 4).

***a)* Averigua la longitud de los lados iguales.**

***b)* Determina las coordenadas de su baricentro.**

a) La distancia del punto a la recta es el valor de la altura del triángulo isósceles tomando como base el lado desigual. Esta altura divide el triangulo en dos triángulos rectángulos cuyas hipotenusas son los lados iguales del triángulo isósceles. En uno de estos triángulos rectángulos, los catetos son la altura y la mitad del lado desigual, es decir, $\sqrt{2}$.

Por tanto, calculamos la altura del triángulo y aplicando el teorema de Pitágoras, obtendremos la longitud del lado deseado.

$$\text{altura} = d((0, 4), x - y = 0) = \frac{|0-4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}\ \text{u}$$

Ahora aplicamos el teorema de Pitágoras:

$$\text{lado igual} = \sqrt{(2\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{8+2} = \sqrt{10}\ \text{u}$$

Por tanto, la longitud del lado igual es $\sqrt{10}$ u.

b) Puesto que el triángulo es isósceles, el baricentro se halla situado sobre la recta perpendicular al lado desigual a una distancia 1/3 de la base y 2/3 del vértice (0, 4).

Llamando A_0 a la proyección del vértice conocido $A(0, 4)$, A_0 es el punto de intersección de la recta $y = x$ y su perpendicular por A:

$$\begin{cases} y = x \\ y = -x + 4 \end{cases} \Rightarrow A_0(2, 2)$$

Llamando G al baricentro:

$$\overrightarrow{A_0G} \Rightarrow \frac{1}{3}\overrightarrow{A_0G} \Rightarrow \begin{cases} x - 2 = -2/3 \\ y - 2 = 2/3 \end{cases} \Rightarrow G\left(\frac{4}{3}, \frac{8}{3}\right)$$

94 Determina las ecuaciones de las rectas que pasan por $P(-2, 7)$ y son perpendiculares a la bisectriz del primer cuadrante y al eje de abscisas. Halla, también, el área del cuadrilátero que forman los ejes X e Y y las rectas halladas.

Una perpendicular a $y = x$ es $y = -x + b$; si pasa por $(-2, 7)$, debe cumplirse lo siguiente:

$$7 = 2 + b \Rightarrow b = 5$$

Por tanto, $y = -x + 5$ es perpendicular a la bisectriz del primer cuadrante y contiene al punto $(-2, 7)$.

La perpendicular al eje OX es $x = -2$.

El cuadrilátero es un trapecio rectángulo.

El punto de intersección con el eje de ordenadas de la recta $y = -x + 5$ es $(0, 5)$.

Con la ayuda de un esquema se observa que la base menor mide 5 u y la mayor, 7 u.

La altura es 2, por lo que el área del trapecio es 12 u^2.

95 Halla las ecuaciones de las rectas que pasa por (6, 2) y forman un triángulo de 27 u^2 con los ejes de coordenadas.

Debe cumplirse que:

$$27 = \frac{a \cdot b}{2} \text{ y } \frac{b}{a} = \frac{b-2}{6}$$

Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones y se obtiene:

$$a = 9 \text{ y } b = 6 \text{ o bien } a = 18 \text{ y } b = 3$$

La pendiente de la recta es $-2/3$, y la ordenada en el origen es 6.

La ecuación de la recta buscada es:

$$y = 6 - \frac{2}{3}x$$

La pendiente de la recta es $-\frac{1}{6}$, y la ordenada en el origen es 3.

La ecuación de la recta buscada es:

$$y = 3 - \frac{1}{6}x$$

96 Un triángulo tiene dos vértices en los puntos $A(0, 0)$ y $B(3, 1)$. Su área es 2 u^2 y el tercer vértice, de ordenada positiva, se encuentra sobre la recta de ecuación $x - 2y + 2 = 0$. Calcula las coordenadas de C y el perímetro del triángulo.

El vértice C está en la recta $x - 2y + 2 = 0$, por lo que sus coordenadas deben ser $C\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$. Tomamos el lado AB como base, luego esta mide $\sqrt{10}$ u. Si el área mide 2, la altura del triángulo sobre AB debe medir $\frac{4}{\sqrt{10}}$ u.

Esta altura es la distancia entre el vértice $C\left(x, \frac{x}{2} + 1\right)$ y la recta que contiene AB, $x - 3y = 0$:

$$\frac{4}{\sqrt{10}} = \frac{\left|x - 3\cdot\left(\frac{x}{2}+1\right)\right|}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{cases} x - \frac{3x}{2} - 3 = 4 \\ -x + \frac{3x}{2} + 3 = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -14 \\ x = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = -6 \\ y = 2 \end{cases}$$

Así pues, el vértice C es el punto (2, 2).

El perímetro será:

$$AB + AC + BC = \sqrt{10} + 2\sqrt{2} + \sqrt{2} = \sqrt{10} + 3\sqrt{2}\ \text{u}$$

97 Escribe la ecuación de la recta simétrica de r: $y = 3x$ respecto de la bisectriz del primer cuadrante y, a continuación, calcula el área del triángulo que forman la recta r, su simétrica, y la recta de ecuación t: $5x + y - 16 = 0$.

La bisectriz del primer cuadrante, $y = x$, y la recta r se cortan en el origen de coordenadas. Un punto de la recta r es, por ejemplo, $P(1, 3)$. Su simétrico respecto de la bisectriz del primer cuadrante es $P'(3, 1)$.

Por tanto, la ecuación de la recta simétrica buscada, s, es:

$$y = \frac{1}{3}x$$

Buscamos los puntos de intersección de la recta la recta t con las rectas r y s:

$$\begin{cases} y = 3x \\ 5x + y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow A(2, 6)$$

$$\begin{cases} y = \frac{1}{3}x \\ 5x + y - 16 = 0 \end{cases} \Rightarrow B(3, 1)$$

Buscamos el ángulo que forman r y s para, así, hallar el área:

$$\cos(r, s) = \frac{|(1, 3)\cdot(3, 1)|}{(\sqrt{10})^2} = 0{,}6 \Rightarrow \text{sen}\,(r, s) = 0{,}8$$

El área será:

$$A = \frac{\sqrt{40}\cdot\sqrt{10}\cdot 0{,}8}{2} = 8\ u^2$$

98 **Un triángulo rectángulo tiene un vértice, *A*, correspondiente al ángulo recto, en el origen de coordenadas; otro en el punto *B*(2, 4), y el *C* está a distancia 3 u del eje de abscisas. Calcula:**

a) **Las ecuaciones de las rectas que contienen *AB* y *AC*.**

b) **El vértice *C*.**

c) **El área del triángulo.**

a) Lado *AB*: $y = 2x$

Lado *AC*: $y = -\dfrac{x}{2}$

b) El vértice *C* tiene por ordenada 3 y, por tanto, su abscisa es -6, puesto que pertenece a $y = -\dfrac{x}{2}$.

c) El área del triangulo rectángulo *BAC* es:

$$A = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{\sqrt{20} \cdot \sqrt{45}}{2} = 15 \text{ u}^2$$

99 **Determina:**

a) **La ecuación de la recta paralela a la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante que pasa por el punto (0, *a*).**

b) **El valor de *a* para que la recta anterior determine en el primer cuadrante con los ejes de coordenadas un triángulo de 8 u² de área.**

c) **La distancia del origen de coordenadas a esta recta.**

d) **La distancia entre esta recta y el punto (4, 0).**

a) $m = -1$ y $n = a$

$y = -x + a \Rightarrow x + y = a$

b) La recta corta al eje de abscisa en el punto $(a, 0)$ y al eje de ordenadas en el punto $(0, a)$, y el triángulo es rectángulo. Por tanto, si el área es 8, $a^2 = 16$, por lo que $a = 4$ (no puede ser -4).

Por tanto, la recta tiene de ecuación:

$$x + y - 4 = 0$$

c) La recta es $x + y - 4 = 0$ y la distancia de (0, 0) a ella es $d = 4/\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ u.

d) Dado que el punto de coordenadas (4, 0) pertenece a la recta $x + y - 4 = 0$, podemos determinar que la distancia pedida es 0 u.

100 **En el triángulo de vértices *A*(−1, −1), *B*(−3, 5) y *C*(1, 3), averigua:**

a) **Las ecuaciones de sus medianas.**

b) **Las coordenadas del ortocentro.**

a) El punto medio de *AB* es $(-2, 2)$. La ecuación de la recta que pasa por este punto y *C*, es $x - 3y + 8 = 0$.

El punto medio de *AC* es (0, 1). La ecuación de la recta que pasa por este punto y *B*, es $4x + 3y - 3 = 0$.

El punto medio de *BC* es $(-1, 4)$. La ecuación de la recta que pasa por este punto y *A*, es $x = -1$.

b) La altura correspondiente al vértice *C* es:

$-x + 3y - 8 = 0$

La altura correspondiente al vértice *B* es:

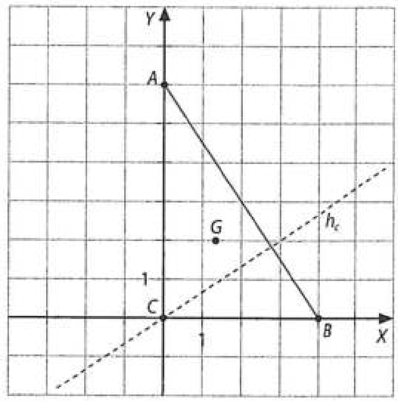
$x + 2y - 7 = 0$

La altura correspondiente al vértice *A* es:

$2x - y + 1 = 0$

Resolviendo un sistema con cualquier par de ecuaciones, se obtiene (1, 3).

101 **Calcula las ecuaciones de las alturas y el baricentro del triángulo que tiene por vértices *A*(0, 6), *B*(4, 0) y *O*(0, 0).**



A partir de la figura, se puede deducir directamente:

- Alturas:

  Correspondiente al vértice *A*: $x = 0$

  Correspondiente al vértice *B*: $y = 0$

  Correspondiente al vértice *C*: como $\overrightarrow{AB} = (4, -6)$, la ecuación de la altura será de la forma $2x - 3y + C = 0$. Como ha de contener el (0, 0), la ecuación es:

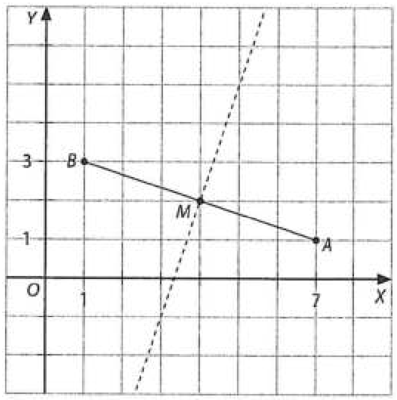
  $$-2x + 3y = 0$$

- Baricentro: es el punto de intersección de las medianas, y se puede calcular directamente sumando las coordenadas de los vértices y dividiendo por tres:

  $$G\left(\frac{4}{3}, 2\right)$$

102 **Un punto equidista de los puntos *A*(7, 1) y *B*(1, 3). La distancia de dicho punto al eje de ordenadas es el doble que al eje de abscisas. Calcula el punto.**

El punto pedido debe estar en la mediatriz de *AB*.



$\overrightarrow{AB} = (-6, 2)$, $M(4, 2)$

Recta perpendicular a $\overrightarrow{AB}$ que pasa por *M* es:

$$-3x + y + 10 = 0$$

Según enunciado, *P*(*x*, *y*) es tal que $x = 2y$, por tanto:

$$\begin{cases} -3x + y + 10 = 0 \\ x = 2y \end{cases} \Rightarrow P(4, 2)$$

103 **Determina la ecuación de una recta que forma con el eje *X* un ángulo de 45° y que dista 15 unidades con (0, 0).**

Hay dos rectas que cumplen las condiciones del enunciado.

Las rectas son de la forma: $x - y + C = 0$.

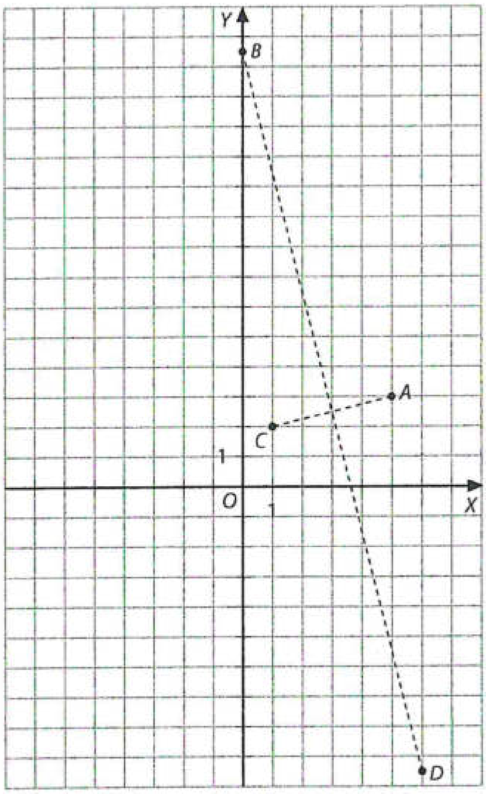
La distancia del origen de coordenadas a estas rectas es de 15 unidades, por tanto:

$$15 = \frac{|0 - 0 + C|}{\sqrt{2}} \Rightarrow C = 15\sqrt{2} \text{ y } C = -15\sqrt{2}$$

Las dos rectas buscadas son:

$$x - y + 15\sqrt{2} = 0 \text{ y } x - y - 15\sqrt{2} = 0$$

104 **Un rombo tiene dos vértices opuestos, $A(5, 3)$ y $C(1, 2)$, y un vértice, B, que está sobre el eje de ordenadas. Halla D.**



$\overrightarrow{CA} = (4, 1)$

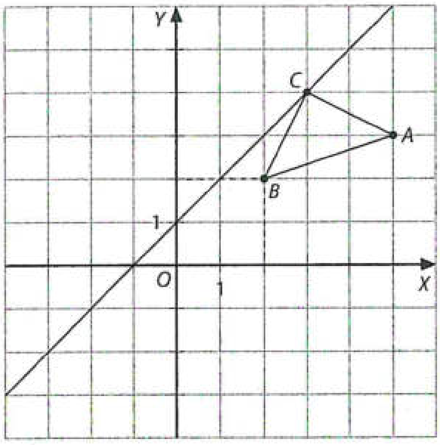
B es la intersección de la mediatriz de CA y el eje de ordenadas.

La mediatriz de CA es de la forma $4x + y + C = 0$. Como debe pasar por el punto medio de CA, que es el $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, la ecuación es $4x + y - \frac{29}{2} = 0$.

Intersectando esta recta con el eje de ordenadas, $x = 0$, se obtiene el punto $B\left(0, \frac{29}{2}\right)$.

El vértice D se obtiene considerando que el segmento BD tiene como punto medio $\left(3, \frac{5}{2}\right)$. Las coordenadas de D son $\left(6, -\frac{19}{2}\right)$.

105 **Dado un triángulo isósceles cuyo lado desigual es AB, con $A(5, 3)$, $B(2, 2)$, calcula el vértice opuesto, C, si sabemos que pertenece a la recta $x - y + 1 = 0$.**



$A(5, 3)$, $B(2, 2)$ y $C(x, x+1)$

Si $d(B, C) = d(C, A)$, debe cumplirse que:

$(5 - x)^2 + (2 - x)^2 = (x - 2)^2 + (x - 1)^2 \Rightarrow (5 - x)^2 = (x - 1)^2$
$\Rightarrow 24 = 8x \Rightarrow x = 3$

El vértice opuesto es $C(3, 4)$.

106 **De un triángulo conocemos un vértice, $A(0, 2)$, y las ecuaciones de dos alturas, $y = -x$ y $x - 3y - 2 = 0$. Halla las ecuaciones de los lados del triángulo y los otros vértices.**

Lados: $3x + y - 2 = 0$, $y = 2 + x$, $x - 5y - 6 = 0$

Vértices: $(-4, -2)$ y $(1, -1)$

El vértice A no pertenece a ninguna de las alturas, por lo que son perpendiculares a los lados AB y AC.

Supongamos que B es el vértice correspondiente a la altura $y = -x$, luego la pendiente del lado AC es 1: $y = x + b$, pasa por A; por tanto, $2 = b$.

El lado AC está en la recta de ecuación $y = x + 2$.

Supongamos que C es el vértice correspondiente a la altura $x - 3y - 2 = 0$, luego la ecuación de la recta del lado AB es de la forma: $3x + y + C = 0$. Como pasa por A, se cumple esta igualdad: $0 + 2 + C = 0 \Rightarrow C = -2$

El lado AB está en la recta de ecuación $3x + y - 2 = 0$.

El vértice C es el punto de intersección de las rectas AC y de la altura que pasa por C:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ x - 3y - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow C(-4, -2)$$

El vértice B es el punto de intersección de las rectas AB y de la altura que pasa por B:

$$\begin{cases} 3x + y - 2 = 0 \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow B(1, -1)$$

Evaluación (página 175)

1. Halla el módulo y el ángulo que forman los siguientes pares de vectores:

a) **$\vec{u} = (2, 1)$ y $\vec{v} = (-1, 3)$**

b) **$\vec{u} = (2, 4)$ y $\vec{v} = (-4, 2)$**

a) $\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(-1)^2 + 3^2} = \sqrt{10} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-2+3}{\sqrt{5}\sqrt{10}} = \dfrac{1}{\sqrt{50}} \Rightarrow \alpha = 81°\, 52'\, 11{,}63''$

b) $\left.\begin{array}{l} |\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} \\ |\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 2^2} = \sqrt{20} \end{array}\right\} \Rightarrow \cos\alpha = \dfrac{-8+8}{\sqrt{20}\sqrt{20}} = 0 \Rightarrow \alpha = 90°$

2. Verifica que $\{\vec{u} = (1, 3), \vec{v} = (-1, 2)\}$ es una base y halla las coordenadas del vector $\vec{w} = (3, 5)$ con respecto a esa base.

Como $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{3}{2}$, entonces tienen direcciones distintas y, por tanto, forman una base del plano.

Se quiere hallar a y b para que se verifique la igualdad $\vec{w} = a \cdot \vec{u} + b \cdot \vec{v}$. Sustituyendo los datos del enunciado, resolviendo las operaciones e igualando, se llega al siguiente sistema: $\begin{cases} a - b = 3 \\ 3a + 2b = 5 \end{cases}$

La solución es: $a = \dfrac{11}{5}$ y $b = \dfrac{-4}{5}$

3. Determina el vector $\overrightarrow{AB}$ siendo $A(-2, 0)$ y $B(-4, 2)$. Además:

a) **Halla un vector para que formen una base del plano.**

b) **Busca otro vector para que la base sea ortogonal.**

Se halla el vector formado por los puntos A y B:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-4, 2) - (-2, 0) = (-2, 2)$$

a) Para hallar una base formada por el vector $\overrightarrow{AB}$, hay que buscar un vector linealmente independiente. Por ejemplo, el vector $\vec{u} = (3, 1)$.

b) Se tiene que buscar otro vector para que la base sea ortogonal. Por ejemplo, se toma el vector $\vec{v} = (1, 1)$.

4. Dada la base de vectores $\{\vec{u} = (2, 3), \vec{v} = (-3, 2)\}$

a) **Comprueba que la base es ortogonal.**

b) **Reescribe la base para que sea una base ortonormal del plano.**

a) Como $\dfrac{1}{-1} \neq \dfrac{3}{2}$ y $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 = 0$, ambos vectores forman una base ortogonal del plano.

b) Para reescribir la base a una ortonormal, hay que normalizar los vectores.

$|\vec{u}| = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \vec{x} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{13}}, \dfrac{3}{\sqrt{13}}\right) \quad |\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2} = \sqrt{13} \Rightarrow \vec{y} = \left(\dfrac{-3}{\sqrt{13}}, \dfrac{2}{\sqrt{13}}\right)$

5. Halla las ecuaciones de la recta que pasa por $A(-1, 3)$ y tiene a $\vec{v} = (2, 1)$ como vector director. Calcula, además, la recta perpendicular que pase por ese punto.

En la siguiente tabla se recogen las ecuaciones:

VECTORIAL	$(x, y) = (-1, 3) + \lambda(2, 1)\ \forall\lambda \in \mathbb{R}$	GENERAL	$x - 2y + 7 = 0$
PARAMÉTRICAS	$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 3 + \lambda \end{cases} \forall\lambda \in \mathbb{R}$	EXPLÍCITA	$y = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{7}{2}$
CONTINUA	$\dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-3}{1}$	PUNTO-PENDIENTE	$y - 3 = \dfrac{1}{2}(x + 1)$

La recta perpendicular pedida es: $(x + 1, y - 3) \cdot (2, 1) = 0 \Rightarrow 2x + y + 2 - 3 = 0 \Rightarrow 2x + y - 1 = 0$

6. Calcula la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(1, 3)$ y $B(0, 1)$.

Partimos de la ecuación de la recta que pasa por los dos puntos, hallando la ecuación continua de la recta. Después se despeja para obtener la ecuación general:

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y-3}{1-3} \Rightarrow \frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{-2} \Rightarrow 2x - y + 1 = 0$$

7. Dada la recta $r: x + 3y - 5 = 0$ y el punto $A(-2, -2)$, calcula:

a) La ecuación de la recta paralela a r que pasa por A.

b) La ecuación de la recta normal a r que pasa por A.

a) Una ecuación de la recta que sea paralela podría tener los mismos coeficientes de la recta r:

$$s: x + 3y + C = 0$$

Se impone que la recta s tiene que pasar por el punto $A(-2, -2)$ y obtenemos el valor de C:

$$(-2) + 3\cdot(-2) + C = 0 \Rightarrow C = 8 \Rightarrow s: x + 3y + 8 = 0$$

b) La recta perpendicular o normal de la recta verifica la ecuación:

$$(-3, 1)\cdot(x + 2, y + 2) = -3x - 6 + y + 2 = 0 \Rightarrow -3x + y - 4 = 0$$

8. Calcula el área del triángulo cuyos vértices son: $A(1, 3)$, $B(5, 6)$ y $C(0, 3)$

El área del triángulo corresponde a la fórmula: $A = \dfrac{b\cdot h}{2}$

La base es la distancia entre dos vértices, esto es: $b = d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16+9} = 5$

Se halla la ecuación general de la recta que pasa por A y B: $\overrightarrow{AB} = (4, 3) \Rightarrow 3x - 4y + C = 0 \Rightarrow 3\cdot 1 - 4\cdot 3 + C = 0 \Rightarrow C = 9$

Luego, la recta tiene ecuación s: $3x - 4y + 9 = 0$

La altura es la distancia entre el punto C y la recta s, es decir: $h = \dfrac{|3\cdot 0 - 4\cdot 3 + 9|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{3}{5}$

Entonces, el área es: $A = \dfrac{5\cdot\frac{3}{5}}{2} = 1{,}5\ \text{u}^2$

9. Halla el circuncentro del triángulo con vértices: $A(1, -3)$, $B(1, 1)$ y $C(3, -1)$

Se calculan las mediatrices de los lados del triángulo.

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4) \text{ y } M_1(1, -1) \Rightarrow m_1: y = -1$$

$$\overrightarrow{BC} = (2, -2) \text{ y } M_2(2, 0) \Rightarrow m_2: x - y - 2 = 0$$

Para hallar el circuncentro, se resuelve el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} x - y = 2 \\ \quad\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases}$

El circuncentro es el punto $C(1, -1)$.

10. Calcula el punto simétrico de $P(3, 5)$ con respecto a la recta $r: x - 4y = 0$.

Se calcula la recta perpendicular a r que pasa por el punto P.

$$(x - 3, y - 5)\cdot(4, 1) = 0 \Rightarrow 4x - 12 + y - 5 = 0 \Rightarrow 4x + y - 17 = 0$$

Se halla el punto de intersección de ambas rectas: $\begin{cases} x - 4y = 0 \\ 4x + \ y = 17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$

Dicho punto es el punto medio del punto P y su simétrico.

Así pues: $(4, 1) = \left(\dfrac{a+3}{2}, \dfrac{b+5}{2}\right) \Rightarrow \begin{cases} a = 5 \\ b = -3 \end{cases}$

11. Dados los puntos $A(1, 4)$, $B(2, 1)$ y $C(6, 1)$. Halla:

a) El vértice D para que $ABCD$ forme un paralelogramo.

b) El área de dicho cuadrilátero.

a) El vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $\overrightarrow{DC}$ son vectores equipolentes. Por consiguiente:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow (1, -3) = (6 - x, 1 - y) \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 4 \end{cases}$$

b) La base del paralelogramo es la distancia entre el punto A y el punto B.

$$d(A, B) = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}\ \text{u}$$

La altura es la distancia entre dos rectas paralelas, que se calcula como la distancia del punto C a la recta que pasa por A y B, cuya ecuación es r: $3x + y - 7 = 0$.

$$h = d(D, r) = \frac{|3\cdot 6 + 1 - 7|}{\sqrt{9+1}} = \frac{12}{\sqrt{10}}$$

Finalmente, el área es: $A = b\cdot h = \sqrt{10}\cdot\dfrac{12}{\sqrt{10}} = 12\ \text{u}^2$