11 DERIVADAS

El estudio de las derivadas será el hilo conductor de la unidad, los alumnos aprenderán a trabajar con ellas y comprobarán su aplicación en la vida cotidiana.

Al inicio de esta unidad se presenta la tasa de variación media que los alumnos conocen de cursos anteriores, así como la tasa de variación instantánea que será el punto de partida para comprender el concepto de derivada de una función en un punto. A continuación, se trabaja en dicho concepto así como en la necesidad de definir derivadas laterales. En ambos casos, se muestran tanto la interpretación geométrica como gráficas que facilitan su comprensión. Es importante que el alumno recuerde los contenidos relativos a límites para poder comprender y utilizar las derivadas.

Se trabaja la determinación de la recta tangente y la recta normal a una curva a partir de las derivadas, así como la relación que existe entre continuidad y derivabilidad. Finalmente, se estudian las funciones derivadas y el cálculo de la derivada de diferentes funciones y de la composición de funciones aplicando la regla de la cadena. Y para terminar se analizan diferentes aplicaciones de la derivada como el estudio de la monotonía y la curvatura de funciones, la representación de funciones y la optimización

La metodología se ha diseñado incluyendo actividades de aprendizaje integradas que permitirán al alumnado avanzar hacia los resultados de aprendizaje de más de una competencia al mismo tiempo.

Se desarrolla la **competencia matemática y competencias básicas en ciencia y tecnología (CMCT)** a lo largo de toda la unidad. A través del conocimiento de las derivadas, se desarrolla en el alumno la capacidad de aplicar el razonamiento lógico-matemático y sus herramientas para describir e interpretar distintas situaciones.

La **competencia digital (CD)** se integra a lo largo de la unidad haciendo partícipes a los alumnos de las ventajas que tiene recurrir a los medios informáticos.

Especial interés tienen las actividades propuestas con GeoGebra a lo largo de los epígrafes, así como las actividades interactivas del *test de autoevaluación* que se encuentra al final de la unidad.

A través de la incorporación del lenguaje matemático a la expresión habitual de los alumnos, se fomenta la **competencia en comunicación lingüística (CL)**. En esta unidad se presentan numerosos conceptos matemáticos que los alumnos han de utilizar correctamente a la hora de resolver actividades y problemas.

La **competencia aprender a aprender (CAA)** se fomenta a través de la autonomía de los alumnos a la hora de resolver problemas. Es fundamental que el profesor incida en las destrezas necesarias para comunicar con eficacia los resultados de la resolución de cualquier actividad, reto o problema.

Las **competencias sociales y cívicas (CSC)** se desarrollan en el área de Matemáticas mediante la aceptación de otros puntos de vista en la resolución de algunos problemas. Es importante que el docente trabaje situaciones que se pueden resolver de diferentes formas, representaciones gráficas de funciones derivadas así como sus características, etcétera; para trabajar con los alumnos que distintas soluciones pueden ser igualmente válidas. El reconocimiento y valoración de las aportaciones ajenas enriquece el aprendizaje.

Temporalización

El tiempo previsto para el desarrollo de la unidad es de tres semanas, aunque deberá adaptarse a las necesidades de los alumnos.

Objetivos

Los objetivos que los alumnos tienen que alcanzar son:

- Manejar el concepto de tasa de variación media y relacionar el concepto de tasa de variación instantánea con el de derivada de una función en un punto.
- Comprender la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto.
- Calcular las derivadas laterales de un función en un punto.
- Determinar la recta tangente y la recta normal.
- Establecer la relación entre continuidad y derivabilidad de una función.
- Comprender el concepto de función derivada y calcular la derivada de funciones y de operaciones con funciones.

- Calcular la derivada de la composición de funciones aplicando la regla de la cadena.
- Trabajar con derivadas sucesivas y aplicarlas correctamente en el estudio de propiedades de las funciones como la curvatura.
- Aplicar el cálculo de derivadas en el estudio de la monotonía y la curvatura de funciones, en la representación de funciones y en problemas de optimización.

Atención a la diversidad

Con el fin de atender los distintos ritmos de aprendizaje de los alumnos, se proponen algunas actividades de refuerzo y de ampliación que podrán utilizarse como alternativa o complemento a las que figuran en el libro del alumno.

PROGRAMACIÓN DE LA UNIDAD

Contenidos	Criterios de evaluación	Estándares de aprendizaje evaluables	Competencias clave
Tasa de variación Tasa de variación media Tasa de variación instantánea	1. Determinar la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea.	1.1. Calcula la tasa de variación media y la tasa de variación instantánea.	CMCT CL CAA CSC
Derivada de una función en un punto Interpretación geométrica Derivadas laterales	2. Relacionar el concepto de tasa de variación instantánea con el de derivada de una función en un punto. 3. Aplicar el concepto de derivada de una función en un punto y su interpretación geométrica al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	2.1. Relaciona el concepto de tasa de variación instantánea con el de derivada de una función en un punto. 3.1. Interpreta geométricamente la derivada de una función en un punto. 3.2. Determina las derivadas laterales de una función en un punto. 3.3. Utiliza medios tecnológicos adecuados para analizar la interpretación geométrica de la derivada de una función en un punto así como las derivadas laterales.	CMCT CD CL CAA
Recta tangente y recta normal	4. Obtener la recta tangente y normal a una función en un punto dado.	4.1. Reconoce la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente. 4.2. Determina la recta tangente a una función en un punto dado. 4.3. Relaciona la derivada de una función con la pendiente de la recta normal. 4.4. Determina la recta normal a una función en un punto dado.	CMCT CL CAA
Continuidad y derivabilidad	5. Analizar conjuntamente la continuidad y la derivabilidad de una función.	5.1. Analiza la relación entre continuidad y derivabilidad de una función. 5.2. Determina el valor de parámetros para que se verifiquen las condiciones de continuidad y derivabilidad de una función en un punto.	CMCT CL CAA
Función derivada Concepto de función derivada Cálculo de la derivada de algunas funciones Derivada de algunas operaciones con funciones Derivada de la composición de funciones: regla de la cadena Derivadas sucesivas	6. Aplicar el cálculo de derivadas al estudio de fenómenos naturales, sociales o tecnológicos y a la resolución de problemas geométricos.	6.1. Calcula la derivada de una función usando los métodos adecuados y la emplea para estudiar situaciones reales y resolver problemas. 6.2. Deriva funciones que son composición de varias funciones elementales mediante la regla de la cadena. 6.3. Extrae e identifica informaciones derivadas del estudio y análisis de funciones logarítmicas en contextos reales. 6.4. Utiliza medios tecnológicos adecuados para calcular derivadas y comprobar los resultados obtenidos.	CMCT CD CL CAA
Aplicaciones de las derivadas Crecimiento y decrecimiento de una función Concavidad y convexidad Representación de funciones Optimización	7. Aplicar el cálculo de derivadas en el estudio de propiedades de las funciones y en situaciones reales.	7.1. Representa y estudia funciones, mediante un estudio completo de sus características usando las propiedades de las derivadas, y los medios tecnológicos adecuados. 7.2. Resuelve problemas sencillos de optimización relacionados con la geometría o propiedades matemáticas e interpreta el resultado obtenido dentro del contexto.	CMCT CD CL CAA

MAPA DE CONTENIDOS DE LA UNIDAD

PARA EL PROFESOR

- Actividades de refuerzo
- Prueba de evaluación

Unidad

Presentación de la unidad
Repasa lo que sabes

1. Tasa de variación
- Tasa de variación media
- Tasa de variación instantánea

2. Derivada de una función en un punto
- Interpretación geométrica
- Derivadas laterales

3. Recta tangente y recta normal

4. Continuidad y derivabilidad

5. Función derivada
- Concepto de función derivada
- Cálculo de la derivada de algunas funciones
- Derivada de algunas operaciones con funciones
- Derivada de la composición de funciones: regla de la cadena
- Derivadas sucesivas

6. Aplicaciones de las derivadas
- Crecimiento y decrecimiento de una función
- Concavidad y convexidad
- Representación de funciones
- Optimización

EJERCICIOS RESUELTOS

EJERCICIOS Y PROBLEMAS

EVALUACIÓN

PARA EL ALUMNO

- **GeoGebra.** Interpretación geométrica
- **Vídeo.** Regla de la cadena
- **GeoGebra.** Representación gráfica de una función y su derivada
- **Vídeo.** Continuidad y derivabilidad
- **Vídeo.** Representación de funciones
- **Actividades interactivas.** Test de autoevaluación

Repasa lo que sabes (página 303)

1. Determina la ecuación de la recta de pendiente -3 que pasa por el punto de coordenadas $(2, -1)$.

La ecuación de una recta en forma explícita se puede escribir: $y = mx + n$.

Si una recta tiene de pendiente -3, su ecuación será de la forma $y = -3x + n$, dado que el enunciado afirma que la recta pasa por el punto $(2, -1)$ podemos escribir:

$$-1 = (-3) \cdot 2 + n \Rightarrow n = 5$$

Definitivamente la ecuación de la recta es: $y = -3x + 5$.

2. Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 + 1$ en el punto de abscisa 2, sabiendo que su pendiente es 4.

Si la pendiente es 4, la ecuación de la recta tangente será de la forma: $y = 4x + n$, para determinar el valor de n precisamos un punto de la recta; el punto de tangencia pertenece a la curva y a la recta: $y = 2^2 + 1 = 5$, el punto de tangencia es: $(2, 5)$.

Podemos escribir $5 = 4 \cdot 2 + n \Rightarrow n = -3$.

La ecuación de la recta es: $y = 4x - 3$.

3. Calcula los siguientes límites de funciones.

a) $\lim\limits_{x \to -5} \left(\dfrac{\sqrt{-1-2x} - 3}{x+5} \right)$

b) $\lim\limits_{h \to 0} \left(\dfrac{\dfrac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} \right)$

a) $$\lim_{x \to -5} \left(\frac{\sqrt{-1-2x} - 3}{x+5} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \to -5} \left(\frac{(-1-2x) - 9}{(x+5) \cdot (\sqrt{-1-2x} + 3)} \right) = \lim_{x \to -5} \left(\frac{-2}{(\sqrt{-1-2x} + 3)} \right) = \frac{-2}{6} = \frac{-1}{3}$$

b) $$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\dfrac{1}{(1+h)^2} - 1}{h} \right) = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{1 - (1 + 2h + h^2)}{(1+h)^2 \cdot h} \right) = \lim_{h \to 0} \left(\frac{-2-h}{(1+h)^2} \right) = \frac{-2}{1} = -2$$

4. Estudia la continuidad de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{2} - 2x & \text{si } x \leq 4 \\ \sqrt{x} - 2 & \text{si } x > 4 \end{cases}$

a) $\text{Dom } f = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

La función es racional, por lo que es continua en todo su dominio.

Para ver el tipo de discontinuidad en los puntos $x_1 = 1$ y $x_2 = -1$ se calculan los límites laterales en dichos puntos:

$$\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \to 1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = -\infty$$

Para el punto $x_1 = 1$ la discontinuidad es asintótica.

$$\lim_{x \to -1^+} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -1^-} \left(\frac{1}{x^2 - 1} \right) = +\infty$$

Para el punto $x_2 = -1$ la discontinuidad es asintótica.

b) La función $g(x)$ es una función definida a trozos compuesta por una función polinómica y una función radical definida en su intervalo positivo. Por consiguiente, la función es continua siempre con la excepción de los puntos de unión, en los que se tiene que estudiar la continuidad.

En este caso:

$$\lim_{x \to 4^+} g(x) = \lim_{x \to 4^+} \left(\frac{x^2}{2} - 2x \right) = 8 - 8 = 0$$

$$\lim_{x \to 4^-} g(x) = \lim_{x \to 4^-} (\sqrt{x} - 2) = 2 - 2 = 0$$

Así pues, $\lim\limits_{x \to 4} g(x) = 0$ y además $g(4) = 0$, por lo que la función $g(x)$ es continua en $x = 4$.

Sugerencias didácticas. Recursos TIC

Interpretación geométrica (página 306)

En el archivo de GeoGebra aparece representada una función junto a las secantes que pasan por el punto $(2, f(2))$ y por $(2 + h, f(2 + h))$ y $(2 - h, f(2 - h))$, respectivamente. Moviendo el deslizador se pueden obtener las secantes para distintos valores de h y observar la relación entre las pendientes de las rectas y las tasas de variación media de los intervalos.

Regla de la cadena (página 318)

En el vídeo se calcula la derivada de la función $f(x) = \ln\sqrt{\dfrac{1-x}{1+x}}$.

Puede utilizarse para mostrar en la pizarra digital el procedimiento a seguir para hallar la derivada o para que los alumnos repasen el procedimiento.

Representación gráfica de una función y su derivada (página 321)

En el archivo de GeoGebra aparecen las representaciones gráficas de una función y de su función derivada. Se puede observar que cuando esta es positiva, $f(x)$ es creciente; cuando la derivada es negativa, $f(x)$ es decreciente; y cuando la derivada se anula, $f(x)$ tiene puntos singulares. Introduciendo nuevas funciones en la caja de texto se pueden obtener las representaciones de otras funciones y sus derivadas con las que observar estas relaciones.

Continuidad y derivabilidad (página 330)

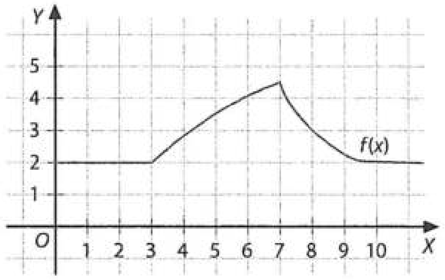
En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 2. Puede utilizarse para mostrar el procedimiento a seguir para determinar los valores de a y b para que la función sea continua y derivable o para que los alumnos repasen este procedimiento.

Representación de funciones (página 333)

En el vídeo se resuelve paso a paso el ejercicio 6. Puede utilizarse para mostrar el procedimiento a seguir para representar una función o para que los alumnos repasen este procedimiento.

Actividades (páginas 304/329)

1 **Observa la gráfica de la función representada en la figura, y calcula, de forma aproximada, las tasas de variación media en los intervalos [1, 3], [3, 5], [5, 7], [7, 8], [8, 10] y [10, 11].**



Se aplica la fórmula $\text{TVM}_{[a,b]} = \dfrac{f(b) - f(a)}{a - b}$

$$\text{TVM}_{[1,3]} = \frac{f(3) - f(1)}{3 - 1} = \frac{0}{2} = 0$$

$$\text{TVM}_{[3,5]} = \frac{f(5) - f(3)}{5 - 3} = \frac{1{,}5}{2} = 0{,}75$$

$$\text{TVM}_{[5,7]} = \frac{f(7) - f(5)}{7 - 5} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

$$\text{TVM}_{[7,8]} = \frac{f(8) - f(7)}{8 - 7} = \frac{-1{,}5}{1} = -1{,}5$$

$$\text{TVM}_{[8,10]} = \frac{f(10) - f(8)}{10 - 8} = \frac{-1}{2} = -0{,}5$$

$$\text{TVM}_{[10,11]} = \frac{f(11) - f(10)}{11 - 10} = \frac{0}{1} = 0$$

2 **Calcula la velocidad (en metros por segundo), en el instante $t = 4$, de un móvil cuya ecuación de movimiento es:**

$$s(t) = 3 - 4t + \frac{t^2}{2}$$

$$v(4) = \lim_{h \to 0} \frac{s(4 + h) - s(4)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3 - 4(4 + h) + (4 + h)^2/2) - (3 - 4 \cdot 4 + 4^2/2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2/2}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{2} = 0 \Rightarrow v(4) = 0 \text{ m/s}$$

3 **Dada la función $f(x) = 3x^2 - 3x$, averigua $f'(2)$.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2 + h) - f(2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(3(2 + h)^2 - 3(2 + h)) - 3(2^2 - 2)}{2} =$$

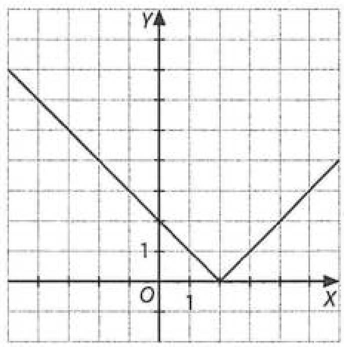
$$= \lim_{h \to 0} (3h + 9) = 9$$

4 **Dada la función $f(x) = 1/x$, averigua $f'(a)$, donde $a \neq 0$. ¿Hay algún punto de la gráfica en que $f'(a) > 0$? ¿Cómo es $f(x)$ en cualquier punto de su dominio?**

Aplicando la definición de derivada en el punto a, se obtiene: $f'(a) = -1/a^2$, esta derivada es siempre negativa para cualquier valor de a; por tanto, la función siempre es decreciente.

5 **¿Existe la derivada en $x = 2$ de la función $f(x) = |x - 2|$? ¿Por qué?**

La representación gráfica de la función $f(x) = |x - 2|$ es la siguiente:



El punto de abscisa $x = 2$ es anguloso, por tanto no existe la derivada de $f(x)$ en $x = 2$.

6 **A partir de la función representada la figura 11.6 (ver página 307 del libro del alumno), determina:**

a) **Los puntos en los que no es derivable.**

b) **Los puntos de derivada nula.**

c) **$f'(-2)$ y $f'(4)$.**

d) **El valor de la pendiente de la recta tangente en $x = -2$, $x = 0$ y $x = 1$.**

a) La función no es derivable en $x = -1$ y en $x = 2$ porque son puntos angulosos y en $x = 3$ ya que no es continua.

b) La función tiene la derivada nula en $x = 0$, puesto que la tangente es horizontal y en los intervalos $(2, 3) \cup (3, \infty)$ al ser una función constante.

c) $f'(-2) = 1$ y $f'(4) = 0$

d) $f'(-2) = 1$, $f'(0) = 0$ y $f'(1) = -2$, se puede observar en este último caso que la pendiente de la recta tangente es -2 puesto que al avanzar una unidad se bajan dos unidades.

7 **Calcula el valor de la pendiente de la recta tangente a $y = \frac{1}{x^2}$ en $x = 2$.**

Obtenemos la derivada de $y = \frac{1}{x^2}$ aplicando la definición, así $y' = = \frac{-2}{x^3}$.

En $x = 2$ la derivada vale $y' = \frac{-1}{4}$; por tanto, la pendiente de la recta tangente es $m = \frac{-1}{4}$.

8 **Determina los puntos de tangente horizontal de las funciones:**

a) $f(x) = 2 + \sqrt{x}$ ***b)*** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

a) Determinamos la derivada de $f(x)$ aplicando la definición: $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, este valor nunca podrá anularse por tanto la función no tiene tangentes horizontales.

b) $f'(x) = 4x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3/4$.

9 **Calcula el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = -2x^2 + x$ en $x = 0$ con el semieje positivo de abscisas.**

Determinamos la derivada de $f(x)$, $f'(x) = -4x + 1 \Rightarrow f'(0) = 1$.

Por tanto, la pendiente de la recta tangente en $x = 0$ es 1 y forma con el semieje positivo de abscisas un ángulo de 45°.

10 **Calcula, si existe, la derivada de la siguiente función en el punto de abscisa $x = 1$.**

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{si } x > 1 \\ 2 - x & \text{si } x \leq 1 \end{cases}$$

En $x = 1$ la función es continua.

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - h - 1}{h} = -1$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{1+h} - 1}{h} = -1$$

$f'(1) = -1$

11 **Calcula si, en el punto de abscisa 2, existe la derivada de la función.**

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4x - 1 & \text{si } x < 2 \\ 2x - 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

No es continua en $x = 2$, por tanto no existe la derivada de f en ese punto.

12 **Determina si la función $f(x) = |x^2 - 1|$ es derivable en $x = -1$ y $x = 1$.**

No es derivable en dichos puntos, puesto que las derivadas laterales en ellos son distintas:

$f'_-(-1) = -2$; $f'_+(-1) = 2$ $f'_-(1) = -2$; $f'_+(1) = 2$

13 **Dada la función $f(x) = (1 - x)^2$, calcula su derivada en el punto de abscisa 1. ¿Qué puedes decir acerca de la recta tangente a la gráfica de f en dicho punto?**

$$f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2}{h} = 0$$

La recta tangente es horizontal.

14 **Averigua el valor de la pendiente de la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x^2 - 1$ en el punto de abscisa $x = 2$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^2 - 1 - 3}{h} = 4$$

El valor de la pendiente de la recta tangente a la curva $x^2 - 1$ en el punto $x = 2$ es 4, y su ecuación: $y = 4x - 5$.

15 **Calcula la pendiente de la tangente a $f(x) = \sqrt{x}$ en el punto de abscisa $x = 4$. A continuación, escribe la ecuación de dicha recta.**

$$f'(4) = \lim_{h \to 0} \frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$$

$f(4) = 2$

$$y - 2 = \frac{1}{4}(x - 4) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + 1$$

16 **Averigua en qué punto de la gráfica de $f(x) = x^2 - 2x$, la pendiente de la recta tangente es 4.**

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^2 - 2(x+h) - (x^2 - 2x)}{h} = 4$$

$\Rightarrow 2x - 2 = 4 \Rightarrow x = 3$

17 **Calcula las ecuaciones de las rectas tangente y normal a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x+2}$ en el punto de abscisa $x = 2$.**

$$f'(2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{4+h} - 2}{h} = \frac{1}{4}$$

$f(2) = 2$

Recta tangente: $y - 2 = \frac{1}{4}(x - 2) \Rightarrow y = \frac{x}{4} + \frac{3}{2}$

Recta normal: $y - 2 = -4(x - 2) \Rightarrow y = -4x + 10$

18 **Determina si la función $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ es derivable en $x = -1$.**

No es derivable en $x = -1$, ya que no es continua en $x = -1$.

19 **Determina si es derivable en $x = 2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ \ln(x - 1) & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

La función f es continua en $x = 2$, pero no es derivable, puesto que $f'_-(2) = 4$ y $f'_+(2) = 1$.

20 **Calcula el valor del parámetro a para que sea derivable en $x = 1/2$ la función:**

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + x & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{a}{x} & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Si $a = -\frac{2}{9}$, f es continua en $x = \frac{1}{2}$, pero no es derivable en $x = \frac{1}{2}$. Por lo tanto el punto $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ es un punto anguloso.

21 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^3 + \frac{1}{x}$

b) $g(x) = 3x^3 - \frac{x^2}{3} + \sqrt{2}x - \sqrt{3}$

c) $h(x) = \frac{3x^5}{5} - \frac{2x^2}{3} + \frac{2}{3}$

d) $i(x) = \frac{1}{2x} - \frac{2}{x^3} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x}}$

a) $f'(x) = 3x^2 - \dfrac{1}{x^2}$

b) $g'(x) = 9x^2 - \dfrac{2x}{3} + \sqrt{2}$

c) $h'(x) = 3x^4 - \dfrac{4x}{3}$

d) $i'(x) = -\dfrac{1}{2x^2} + \dfrac{6}{x^4} - \dfrac{\sqrt{3}}{2x\sqrt{x}}$

22 **Calcula la derivada de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = x^4 \cdot \ln x$ ***c)*** $h(x) = \dfrac{3x}{3x-1}$

b) $g(x) = \sqrt{x} \cdot \cos x$ ***d)*** $i(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$

a) $f'(x) = x^3 + 4x^3 \cdot \ln x$

b) $g'(x) = \dfrac{\cos x - 2x \cdot \operatorname{sen} x}{2\sqrt{x}}$

c) $h'(x) = \dfrac{-3}{(3x-1)^2}$

d) $i'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x} \cdot (\sqrt{x}+1)^2}$

23 **Calcula la derivada de $f(x) = x^4 \ln x$ y halla la pendiente de la recta tangente a la función en $x = 1$.**

La función derivada es $f'(x) = x^3 + 4x^3 \cdot \ln x \Rightarrow f'(1) = 1$.

Luego la pendiente de la recta tangente es $m = 1$.

24 **Calcula la pendiente de la recta tangente a $h(x) = \dfrac{3x}{3x-1}$ en $x = 1$.**

La función derivada es: $h'(x) = \dfrac{-3}{(3x-1)^2} \Rightarrow h'(1) = \dfrac{-3}{4}$

Luego la pendiente de la recta tangente es: $m = -\dfrac{3}{4}$

25 **Dada la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + ax + 1$, calcula el valor de a para que la pendiente de la recta tangente en $x = 1$ sea $-\dfrac{5}{2}$.**

Calculamos la derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + a \Rightarrow -\frac{5}{2} = 3 \cdot 1^2 - 6 \cdot 1 + a \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

26 **Calcula la derivada de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = e^{2x}$ ***e)*** $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$

b) $f(x) = (x+1) \cdot 2^{x+1}$ ***f)*** $f(x) = \operatorname{sen} x^2$

c) $f(x) = \ln(x + e^{-x})$ ***g)*** $f(x) = \cos 2x^2$

d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x$ ***h)*** $f(x) = \operatorname{sen} x^2 - \cos x^2$

a) $f'(x) = 2e^{2x}$

b) $f'(x) = 2^{x+1} \cdot [1 + (1+x)\ln 2]$

c) $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$

d) $f'(x) = 2\cos 2x$

e) $f'(x) = \operatorname{sen} 2x$

f) $f'(x) = 2x \cos x^2$

g) $f'(x) = -4x \operatorname{sen} 2x^2$

h) $f'(x) = 2x(\cos x^2 + \operatorname{sen} x^2)$

27 **Dada la función $f(x) = 3x^2 - x$, calcula $f'(1)$, $f''(-2)$ y $f'''(2)$.**

$f'(1) = 6 \cdot 1 - 1 = 5$, $f''(-2) = 6$, $f'''(2) = 0$

28 **Halla las derivadas sucesivas de la función $f(x) = x^3 - 2$.**

$f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{4)}(x) = 0$, $f^{5)}(x) = 0\ldots$

$f^{n)}(x) = 0$

29 **Calcula la segunda derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 + b & \text{si } x \geq a \\ -(x+a)^2 + b & \text{si } x < a \end{cases}$$

Primero calculamos la primera derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+a) & \text{si } x \geq a \\ -2(x+a) & \text{si } x < a \end{cases}$$

Y ahora podemos calcular la segunda:

$$f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x > a \\ -2 & \text{si } x < a \end{cases}$$

30 **Determina la función derivada de la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{si } x < 1 \\ \ln x & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

La función derivada es:

$$f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 1 \\ \dfrac{1}{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

31 **Determina los intervalos de concavidad y convexidad de las siguientes funciones, indicando, si existen, los puntos de inflexión.**

a) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ 2^{-x+1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \dfrac{x}{e^x}$

c) $f(x) = x \cdot e^{x^2}$

d) $f(x) = x - e^x$

e) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x}$

f) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

g) $f(x) = x - \sqrt[3]{x^2}$

h) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$, en $(-\pi, \pi)$

a) $f''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < 0 \\ 2^{-x+1} \ln^2 x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

f es siempre cóncava. En $x = 0$ hay un punto anguloso. No es un punto de inflexión.

b) $f''(x) = \dfrac{-2+x}{e^x}$

f es convexa en $(-\infty, 2)$ y cóncava en $(2, +\infty)$. En $x = 2$ tiene un punto de inflexión.

c) $f''(x) = e^{x^2}(4x^3 + 6x)$

f es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. En $x = 0$ tiene un punto de inflexión.

d) $f''(x) = -e^x$

f es siempre convexa.

e) $f''(x) = \dfrac{2}{x^3}$

f es convexa en $(-\infty, 0)$ y cóncava en $(0, +\infty)$. No existe punto de inflexión.

f) $f''(x) = \dfrac{2\ln x - 3}{x^3}$

f es convexa en $(0, e^{3/2})$ y cóncava en $(e^{3/2}, +\infty)$. En $x = e^{3/2}$ tiene un punto de inflexión.

g) $f''(x) = \dfrac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$

f es siempre cóncava. En $x = 0$ hay un punto anguloso que no es de inflexión.

h) $f''(x) = -\operatorname{sen} x + \cos x$

f es cóncava en $(-3\pi/4, \pi/4)$, y convexa en $(-\pi, -3\pi/4)$ y $(\pi/4, \pi)$. En $x = -3\pi/4$ y en $x = \pi/4$ tiene puntos de inflexión.

32 **Dada la función $f(x) = -x^2 + 3x - 2$, determina los extremos relativos y los intervalos de monotonía.**

Determinamos la pendiente de la recta tangente en $x = 3$, $f'(x) = -2x + 3 \Rightarrow f'(3) = -3$.

A continuación calculamos las coordenadas del punto de tangencia: $y = -3^2 + 3 \cdot 3 - 2 = -2$, el punto de tangencia es $(3, -2)$.

La ecuación de la recta tangente será de la forma:

$$y = -3x + n \Rightarrow -2 = -3 \cdot 3 + n \Rightarrow n = 7$$

Por tanto, la ecuación de la recta tangente es $y = -3x + 7$.

33 **Averigua en qué punto de su gráfica la función $f(x) = \dfrac{x+1}{2-x}$ tiene una recta tangente de pendiente 1/3, y escribe su ecuación.**

Derivamos la función, $f'(x) = \dfrac{3}{(2-x)^2}$, e igualamos $f'(x)$ a $\dfrac{1}{3}$:

$$\frac{3}{(2-x)^2} = \frac{1}{3} \Rightarrow x^2 - 4x - 8 = 0$$

Se resuelve la ecuación y se halla $x = -1$ y $x = 5$. Luego existen dos rectas tangentes de pendiente $\dfrac{1}{3}$.

La ecuación de la recta tangente será de la forma $y = \dfrac{x}{4} + n$.

Determinamos los puntos de tangencia: $(-1, 0)$ y $(5, -2)$.

$$0 = \frac{-1}{3} + n \Rightarrow n = 0{,}235$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{x}{3} + 0{,}235$.

$$-2 = \frac{5}{3} + n \Rightarrow n = -3{,}235$$

La ecuación de la recta tangente es $y = \dfrac{x}{3} - 3{,}235$.

34 **Halla en qué punto es paralela a la recta $x + 2y - 3 = 0$ la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \sqrt{x} - x$.**

La recta $x + 2y - 3 = 0$ tiene de pendiente $-\dfrac{1}{2}$.

Derivamos la función $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1$ e igualamos a $-\dfrac{1}{2}$:

$\dfrac{1}{2\sqrt{x}} - 1 = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow x = 1$, el punto pedido es $(1, 0)$.

35 **Halla los puntos críticos de $f(x) = xe^x$.**

Derivamos e igualamos a 0, $f'(x) = e^x(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$.

Por tanto, las coordenadas del punto pedido son: $P\left(-1, -\dfrac{1}{e}\right)$

36 **Calcula las rectas tangentes a la función $f(x) = x^3 + x^2 - 3x + 2$ en los puntos de intersección con la recta $y = -2x + 3$.**

Determinamos en primer lugar los puntos de intersección:

$$x^3 + x^2 - 3x + 2 = -2x + 3 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 3$

$f'(1) = 2$, el punto de tangencia es $(1, 1)$.

La ecuación de la recta tangente será: $1 = 2 \cdot 1 + n \Rightarrow n = -1 \Rightarrow y = 2x - 1$

$f'(-1) = -2$, el punto de tangencia es $(-1, 5)$.

La ecuación de la recta tangente será: $5 = 2 \cdot (-1) + n \Rightarrow n = 7 \Rightarrow y = -2x + 7$

37 **La recta $y = 2x - 3$ es tangente a $f(x) = ax^3 + bx^2 + x - 2$ en $x = 1$. Averigua a y b.**

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 1$

$f'(1) = 3a + 2b + 1 = 2 \Rightarrow 3a + 2b = 1$

El punto de tangencia pertenece a la recta y a la curva.

$y = 2 \cdot 1 - 3 = -1 \Rightarrow P(1, -1)$

$-1 = a \cdot 1^3 + b \cdot 1^2 + 1 - 2 \Rightarrow a + b = 0$

Resolvemos el sistema: $\begin{cases} 3a + 2b = 1 \\ a + b = 0 \end{cases} \Rightarrow a = 1, b = -1$

38 **Averigua los intervalos de monotonía de:**

$$f(x) = -2x^3 - 3x^2 + 12x - 1$$

Calculamos la función derivada e igualamos a cero:

$$f'(x) = -6x^2 - 6x + 12 = 0 \Rightarrow x = -2 \text{ y } x = 1$$

Intervalos de monotonía: $(-\infty, -2) \cup (-2, 1) \cup (1, +\infty)$. Al sustituir un punto de cada uno de los intervalos en la función derivada y observar su signo, obtenemos que la función es creciente en $(-2, 1)$ y decreciente en $(-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$.

39 **Determina los extremos relativos de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2x+1}$.**

$$D(x) = \mathbb{R} - \left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

Al derivar la función, $f'(x) = \dfrac{2x^2 + 2x}{(2x+1)^2}$, e igualarla a cero se obtiene: $x = 0$ y $x = -1$

Intervalos de monotonía:

$(-\infty, -1) \cup \left(-1, -\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(-\dfrac{1}{2}, 0\right) \cup (0, +\infty)$.

	$-\infty$ a -1	-1 a $-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$ a 0	0 a $+\infty$
$f'(x)$	+	−	−	+
$f(x)$	↗	↘	↘	↗

Tenemos un máximo relativo en $(-1, -1)$ y un mínimo relativo en $(0, 0)$.

40 **Averigua los puntos de tangente horizontal de $f(x) = 4x^3 - x^4$. Estudia si son todos extremos relativos, indicando los intervalos de monotonía de la función.**

Los puntos de tangente son los de derivada nula:

$$12x^2 - 4x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ y } x = 3$$

Los intervalos de monotonía son $(-\infty, 0) \cup (0, 3) \cup (3, +\infty)$

	$-\infty$ a 0	0 a 3	3 a $+\infty$
$f'(x)$	+	+	−
$f(x)$	↗	↗	↘

El punto $(0, 0)$ no es un extremo relativo, el punto $(3, 27)$ es un máximo relativo.

41 **Dada la función $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$, indica:**

a) **El dominio.**

b) **Los puntos singulares.**

c) **Los intervalos de monotonía.**

a) $\text{Dom } f = (0, 1) \cup (1, +\infty)$

b) Derivamos e igualamos a cero:

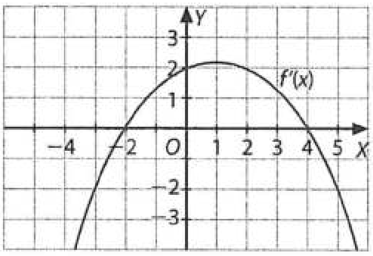
$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0 \Rightarrow x = e \Rightarrow (e, e)$$

c) $(0, 1) \cup (1, e) \cup (e, +\infty)$

	0	1	e	$+\infty$
$f'(x)$	−	−	+	
$f(x)$	↘	↘	↗	

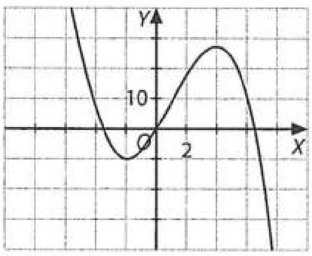
El punto (e, e) es un mínimo relativo.

42 **A partir de la gráfica de $f'(x)$ que se observa en la figura, indica los intervalos de crecimiento de la función $f(x)$ y sus extremos relativos. A continuación, esboza una posible representación de $f(x)$.**



La función es creciente cuando su derivada es positiva, en el intervalo $(-2, 4)$, y decreciente cuando su derivada es negativa, en $\mathbb{R} - [-2, 4]$.

En $x = -2$ la derivada es negativa y la función pasa de ser decreciente a ser creciente; por tanto, tenemos un mínimo relativo. En $x = 4$ hay un máximo relativo.



43 **Representa la función $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$, indicando:**

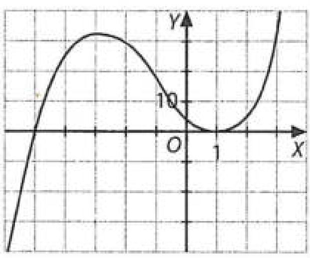
a) **Los puntos de intersección con los ejes.**

b) **Los puntos singulares.**

a) Con el eje X, $y = 0 \Rightarrow 0 = x^3 + 3x^2 - 9x + 5 \Rightarrow x = -5$ y $x = 1$; por tanto, los puntos de intersección son: $(-5, 0)$ y $(1, 0)$.

Con el eje Y, $x = 0 \Rightarrow y = 5$; por lo que el punto de corte es $(0, 5)$.

b) $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = -3$ y $x = 1 \Rightarrow (-3, 32)$ y $(1, 0)$



44 **Representa la función $f(x) = \dfrac{-3x + 1}{x - 2}$, indicando:**

a) **El dominio y la continuidad.**

b) **Las ramas infinitas.**

c) **Los puntos de intersección con los ejes.**

d) **Los puntos de tangente horizontal.**

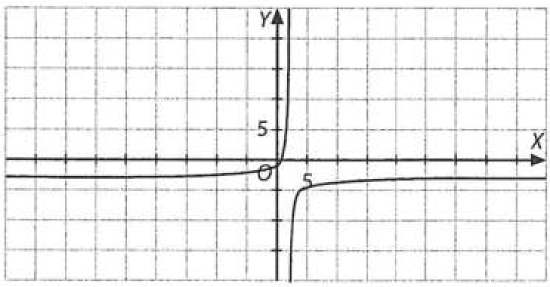
a) Dom $f = \mathbb{R} - \{2\}$. Es continua en todo su dominio.

b) $\lim_{x \to \infty} (-3x + 1)/(x - 2) = -3$

c) Eje X, $y = 0 \Rightarrow 0 = (-3x + 1)/(x - 2) \Rightarrow x = 1/3$; el punto de corte es: $(1/3, 0)$.

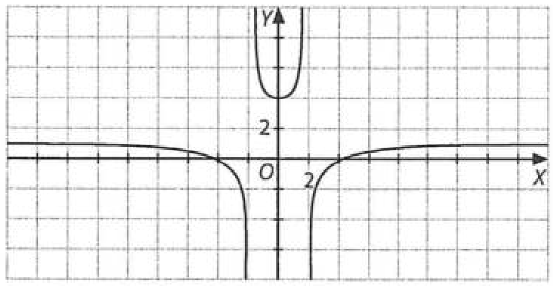
Eje Y, $x = 0 \Rightarrow y = -1/2$, el punto de corte es $(0, -1/2)$.

d) $f'(x) = 5/(x - 2)^2$, la derivada no se anula nunca, por tanto no existen puntos de tangente horizontal.



45 **Construye la gráfica de una función que cumpla las siguientes condiciones:**

- **Dom $f = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$**
- **Asíntotas verticales: $x = -2$, $x = 2$**
- **Asíntota horizontal: $y = 1$**
- **Puntos de intersección con los ejes: $(-4, 0)$, $(4, 0)$ y $(0, 2)$.**
- **Decreciente en $(-\infty, -2) \cup (-2, 0)$ y creciente en $(0, 2) \cup (2, +\infty)$.**



46 **Encuentra dos números cuya suma sea 100 y cuyo producto sea máximo.**

$a + b = 100 \Rightarrow a = 100 - b$

$P = a \cdot b \rightarrow P(b) = 100b - b^2$

Se trata de una función de segundo grado, cuyo máximo se encuentra en $b = 50$.

Luego se trata de los números $a = b = 50$.

47 **Se quiere construir un rectángulo con un alambre de longitud, l. ¿Qué dimensiones ha de tener el rectángulo para que su área sea máxima?**

$$2a + 2b = l \Rightarrow a = \frac{l - 2b}{2}$$

$$A = a \cdot b \rightarrow A(b) = \frac{lb - 2b^2}{2}$$

Se trata de una función de segundo grado, cuyo máximo se encuentra en $b = \dfrac{-l/2}{-2} = \dfrac{l}{4}$.

Luego $b = a = \dfrac{l}{4}$, es un cuadrado.

48 **Entre todos los triángulos isósceles cuyo perímetro es 36 cm, calcula el que tiene área máxima.**

$$36 = 2a + b \Rightarrow a = 18 - \frac{b}{2}$$

$$A = b \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{4} \Rightarrow A(b) = \sqrt{324b^2 - 18b^3}$$

El valor máximo de la función se alcanza en el mismo punto que en el cuadrado de la función:

$(A^2(b))' = -54b^2 + 648b$

$(A^2(b))' = 0$ si $b = 0$ y $b = 12$ $b = 0$ no tiene sentido.

$(A^2(12))'' = -108 \cdot 12 + 648 = -648$

Como $(A^2(12))''' < 0$, se trata de un máximo.

Para que tenga sentido, el triángulo debe ser equilátero, de lado 12 cm.

Ejercicios y problemas (páginas 334/338)

Tasa de variación media

1 **Calcula la tasa de variación media de las siguientes funciones en el intervalo que se indica.**

a) $f(x) = x + 2$ en $[-1, 5]$

b) $f(x) = x^2 + 3$ en $[0, 1]$

c) $f(x) = x^2 + x$ en $[0, 3]$

d) $f(x) = x^3 + 4$ en $[4, 6]$

e) $f(x) = x^2 + x^4$ en $[0, 2]$

f) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ en $[-1, 1]$

g) $f(x) = \log x$ en $[1, 10]$

h) $f(x) = 2^x$ en $[-10, 1]$

i) $f(x) = \sqrt{2x+1}$ en $[4, 12]$

j) $f(x) = x^2 + 1$ en $[x, x + h]$

k) $f(x) = \sqrt{x^3}$ en $[x, a]$

l) $f(x) = \ln (x - 1)$ en $[2, 3]$

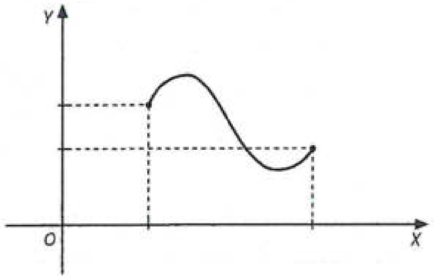
a) 1 *d)* 76 *g)* 1/9 *j)* $2x + h$

b) 1 *e)* 10 *h)* 0,181 7 *k)* $\dfrac{x^2 + ax + a^2}{\sqrt{x^3} + \sqrt{a^3}}$

c) 4 *f)* -1 *i)* 1/4 *l)* ln 2

2 **Si una función tiene una tasa de variación media negativa en un determinado intervalo, ¿puede afirmarse que la función es decreciente en dicho intervalo?**

Si una función tiene una tasa de variación media negativa en un determinado intervalo, no puede afirmarse que en este intervalo sea decreciente, ya que puede presentar intervalos de crecimiento y decrecimiento y tener una tasa de variación media global negativa.



3 **Demuestra que la tasa de variación media de las funciones del tipo $f(x) = ax^2 + k$ es la misma en un determinado intervalo, independientemente del valor de k.**

Sea el intervalo de amplitud h, $(x_0 + h, x_0)$.

$$\text{T.V.M.}\ [x_0 + h, x_0] = \frac{a(x_0+h)^2 + k - ax_0^{\,2} - k}{h} =$$

$$= \frac{2ax_0h + ah^2}{h} = 2ax_0 + ah$$

Es decir, el valor de k no interviene en el valor de la tasa de variación media.

Tasa de variación instantánea

4 **Calcula la tasa de variación instantánea utilizando la fórmula: TVI $(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ en las siguientes funciones, en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = -x + 2$ en $x = 10$

b) $f(x) = x^2$ en $x = 2$

c) $f(x) = x^2 + 1$ en $x = 0$

d) $f(x) = x^3$ en $x = a$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$ en $x = a$

f) $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = a$

a) -1 *c)* 0 *e)* $\dfrac{-1}{(a+1)^2}$

b) 4 *d)* $3a^2$ *f)* $\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$

Derivada de una función en un punto

5 **Utilizando la definición de derivada, halla la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = (3 - x)/2$ en $x = \sqrt{2}$

b) $f(x) = x^2 + 2x$ en $x = 1$

c) $f(x) = (x - 5)^2$ en $x = 1/2$

d) $f(x) = 1/(x - 2)$ en $x = 0$

e) $f(x) = 1/\sqrt{x}$ en $x = 4$

a) $f'(\sqrt{2}) = -1/2$

b) $f'(1) = 4$

c) $f'(1/2) = -9$

d) $f'(0) = -1/4$

e) $f'(4) = -1/16$

6 **Aplicando la definición de derivada, calcula la derivada de las siguientes funciones en los puntos que se indican.**

a) $f(x) = x^3 + x^2$ en $x = 2$

b) $g(x) = x^3 + 3$ en $x = 1$

c) $h(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = -1$

d) $i(x) = \dfrac{x}{3}$ en $x = 5$

e) $j(x) = \dfrac{1}{x+3}$ en $x = -4$

f) $k(x) = \sqrt{x+1}$ en $x = 2$

a) $f'(2) = 16$ *d)* $i'(5) = \dfrac{1}{3}$

b) $g'(1) = 3$ *e)* $j'(-4) = -1$

c) $h'(-1) = -1$ *f)* $k'(2) = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$

7 **Si existe la derivada de una función en un punto, ¿esta es una función o un número real?**

La derivada de una función en un punto es un número real.

8 **Si en un punto la recta tangente a la función $f(x)$ es paralela al eje de abscisas, ¿qué ocurre con la derivada en ese punto?**

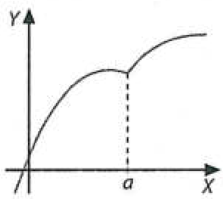
Si la recta tangente es paralela al eje de abscisas, la derivada es nula.

9 **Teniendo en cuenta la gráfica, indica cuál de las siguientes afirmaciones es incorrecta:**

a) $f'(a) = 0$

b) $f'(a)$ no existe.

c) $f(x)$ es continua en a.



La afirmación incorrecta es que $f'(a) = 0$, ya que, dado que a es un punto anguloso de la función, $f'(a)$ no existe.

10 **¿En qué punto no es derivable la función $f(x) = |x + 2|$?**

La función $f(x) = |x + 2|$ es una función continua en $\mathbb{R}$, cuya expresión se puede desdoblar del siguiente modo:

$$f(x) = \begin{cases} -x - 2 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 & \text{si } x \geq -2 \end{cases}$$

$x = -2$ es el punto de unión de los dos *trozos*, por lo que, para calcular la derivada en este punto, es preciso calcular sus derivadas laterales:

$$f'_-(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-(-2 + h) - 2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{-h}{h} = -1$$

$$f'_+(-2) = \lim_{h \to 0} \frac{f(-2 + h) - f(-2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2 + h + 2 - 0}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

La función no es derivable en el punto $x = -2$, ya que, en este punto, las derivadas laterales no coinciden. Por tanto, $\nexists f'(-2)$.

11 **Aplicando la definición de derivada, calcula $f'(3)$ en las funciones que se indican y di si las funciones son crecientes o decrecientes en dicho punto.**

a) $f(x) = (x + 1)^2$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{1}{x - 2}$

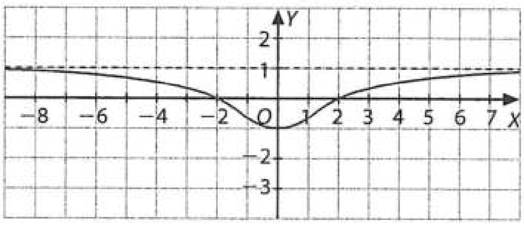
a) $f'(3) = 8 > 0 \Rightarrow f$ es creciente en $x = 3$.

b) $f'(3) = -1 < 0 \Rightarrow g$ es decreciente en $x = 3$.

12 **Observa la gráfica de la función $f(x)$ y di qué valor tienen, aproximadamente:**

a) $f(0)$ ***c)*** $f'(0)$

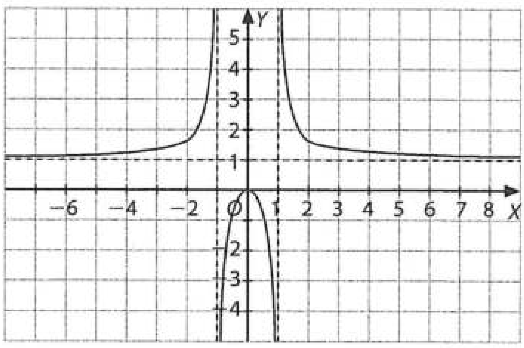
b) x si $f(x) = 0$ ***d)*** $f'(-2)$



a) $f(0) = -1$ ***c)*** $f'(0) = 0$

b) $x = -2, x = 2$ ***d)*** $f'(-2) = -\dfrac{1}{2}$

13 **Observa la representación gráfica de $f(x)$: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$**



Determina:

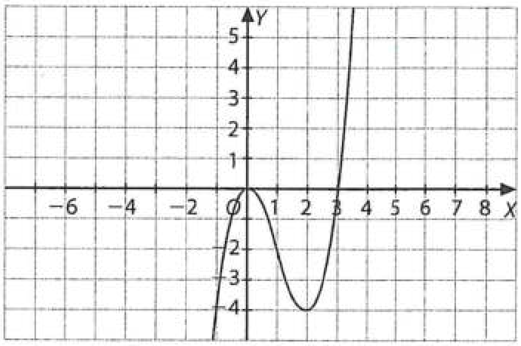
a) $f'(0)$

b) **¿Qué relación existe entre $f'(-3)$ y $f'(3)$?**

a) $f'(0) = 0$

b) $f'(-3)$ y $f'(3)$ son iguales pero de signo contrario.

14 **Dada la representación gráfica de $f(x) = x^3 - 3x^2$:**



Determina:

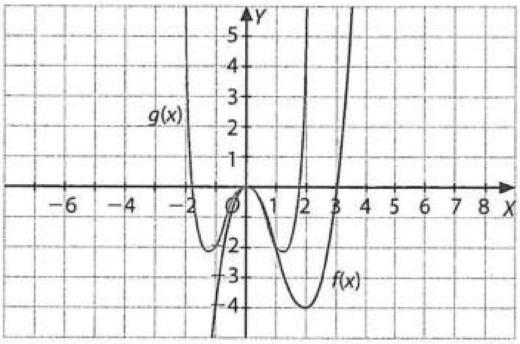
a) **Los puntos de derivada nula.**

b) **Los intervalos de derivada positiva y los intervalos de derivada negativa.**

a) $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2$

b) En $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ la derivada es positiva, en $(0, 2)$ la derivada es negativa.

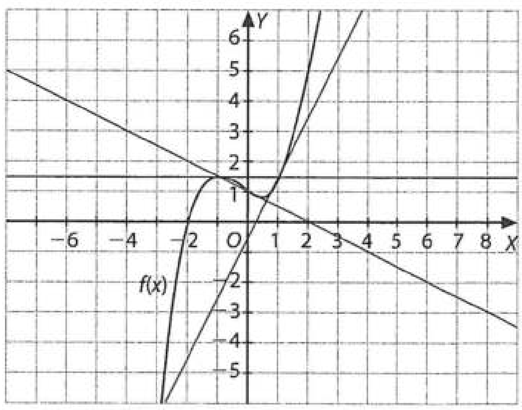
15 **Dadas las representaciones gráficas de las funciones $f(x) = x^3 - 3x^2$ y $g(x) = x^4 - 3x^2$:**



A partir de las gráficas, determina la derivada de cada una en $x = -1$.

Es más rápidamente creciente la función $f(x)$, puesto que su recta tangente tiene una pendiente mayor.

16 **A partir de la gráfica de la función $f(x)$, y de las de las tangentes en $x = -1$, $x = 0$ y $x = 1$, calcula $f'(-1)$, $f'(0)$ y $f'(1)$.**



$f'(-1) = 0$

$f'(0) = -\dfrac{1}{2}$

$f'(1) = 2$

17 **Averigua en qué puntos no es derivable la siguiente función:**

$$f(x) = |x^2 - x - 2|$$

Dado que $x^2 - x - 2 = (x+1)\cdot(x-2)$, en los puntos $x = -1$ y en $x = 2$ la función no será derivable.

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - x - 2 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + x + 2 & \text{si } -1 \le x \le 2 \\ x^2 - x - 2 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(-1) = 2x - 1 = -2 - 1 = -3 \\ f'_+(-1) = -2x + 1 = 2 + 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} f'_-(2) = -2x + 1 = -4 + 1 = -3 \\ f'_+(2) = 2x - 1 = 4 - 1 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists\, f'(-2)$$

18 **Explica por qué no es derivable en $x = 0$ la siguiente función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x < 0 \\ -x + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$$

$f(0) = 2$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (x^2 + 1) = 1 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} (-x + 2) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \nexists \lim_{x \to 0} f(x)$$

Porque $f(x)$ no es continua en $x = 0$.

19 **Di en qué punto no es derivable la siguiente función definida a trozos:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \ge 2 \\ 4x & \text{si } x < 2 \end{cases}$$

La función está definida a trozos, es continua puesto que $f(2) = 8$ y los límites laterales, cuando x tiende a 2, son iguales y valen 8, y la derivada existe en todo punto de $\mathbb{R} - \{2\}$.

En el punto $x = 2$, que es el punto de unión de los dos trozos, debe calcularse la derivada, si existe, mediante las derivadas laterales:

$$f'_+(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(2+h)^3 - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + 6h^2 + 12h + h^3 - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(6h + 12 + h^2)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} (6h + 12 + h^2) = 12$$

$$f'(2) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{4(2+h) - 8}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{8 + 4h - 8}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{8 + 4h - 8}{h} = 4$$

Dado que las derivadas laterales no coinciden, $\nexists\, f'(2)$.

Es aconsejable que los alumnos realicen la representación gráfica para que constaten que se trata de un punto *anguloso*.

20 **Dadas las siguientes funciones, indica en qué puntos no son derivables. Razona por qué.**

a) $f(x) = |x - 3|$

b) $f(x) = |x^2 - 1|$

c) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ -x + 1 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{si } x < 0 \\ x^2 + 2 & \text{si } x \ge 0 \end{cases}$

a) En $x = 3$

Porque $f(x) = |x - 3| = \begin{cases} -x + 3 & \text{si } x < 3 \\ x - 3 & \text{si } x \ge 3 \end{cases}$ y las derivadas laterales en $x = 3$ no son iguales: por la izquierda es -1 y por la derecha, 1.

También se puede razonar que en $x = 3$ hay un punto anguloso.

b) En $x = 1$ y en $x = -1$

Porque $f(x) = |x^2 - 1| = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x < -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } -1 \le x < -1 \\ x^2 - 1 & \text{si } x \ge 1 \end{cases}$ y las derivadas laterales en $x = -1$ y en $x = 1$ no son iguales:

- En $x = -1$, por la izquierda es -2, y por la derecha es 2.
- En $x = 1$, por la izquierda es -2, y por la derecha es 2.

También se puede razonar que en $x = -1$ y en $x = 1$ hay puntos angulosos.

c) En $x = 0$ la función no es continua, por lo que no es derivable en este punto.

d) La función es continua en $x = 0$, pero no es derivable, porque las derivadas laterales no son iguales en $x = 0$: por la izquierda la derivada es 1, por la derecha la derivada es 0.

Se puede razonar a partir de la representación gráfica de la función.

21 **Dada la siguiente función:**

$$f(x) = \frac{x+1}{x-1}$$

Calcula la ecuación de la recta tangente y normal en $x = 2$.

Recta tangente: $y - 3 = -2(x - 2)$

Recta normal: $y - 3 = \frac{1}{2}(x - 2)$

Función derivada

22 **¿Es lo mismo derivada de una función en un punto que función derivada?**

No, la derivada de una función en un punto es el valor de la pendiente de la recta tangente a esta función en este punto, y la función derivada es aquella aplicación que asocia a cada valor de x el valor de la derivada de la función en x.

23 **Si la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$, ¿es derivable también en $\mathbb{R}$?**

Si la función $f(x)$ es continua en $\mathbb{R}$ no tiene por qué ser derivable. Lo contrario sí que es cierto.

24 **Calcula la función derivada de estas funciones.**

a) $f(x) = x^3 + 2x$

b) $f(x) = (x + 2)^2$

c) $f(x) = x^2 - 5$

d) $f(x) = 2x^3 + 9x^2$

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

f) $f(x) = \left(x + 2\sqrt{x}\right)^3$

g) $f(x) = 3\sqrt[5]{x^3} + 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{4x}$

h) $f(x) = x\sqrt[3]{x^2} + 7x + \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$

i) $f(x) = \dfrac{2x^2}{3} + \dfrac{4x}{5} - \dfrac{1}{6}$

j) $f(x) = 1 + \dfrac{2}{x} - \dfrac{2}{x^2}$

k) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{3}{x\sqrt{x}}$

l) $f(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{3}x - x^2 - 3x^3$

m) $f(x) = 2\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$

n) $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{x^3}$

ñ) $f(x) = 2x^4 - 3x^2 + 1$

o) $f(x) = 1 - \dfrac{2}{x^2}$

p) $f(x) = 5\sqrt{x} + \sqrt{5x} - \dfrac{x^3}{\sqrt{x^3}}$

q) $f(x) = \dfrac{\ln x}{7} + \dfrac{2}{x}$

r) $f(x) = \sqrt{x^3} + \sqrt[3]{x^2}$

s) $f(x) = (2 - 6x)^2$

t) $f(x) = 3x\sqrt{x} - \dfrac{3x}{\sqrt{x}}$

u) $f(x) = 3x \cdot (x^2 - 2)$

v) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3}$

w) $f(x) = \dfrac{x + x^3}{x^2}$

x) $f(x) = \dfrac{1}{2x} + \dfrac{x}{2}$

y) $f(x) = \sqrt[3]{x} + \sqrt{3}$

z) $f(x) = \dfrac{5x}{\sqrt{x} - 5}$

a) $f'(x) = 3x^2 + 2$

b) $f'(x) = 2x + 4$

c) $f'(x) = 2x$

d) $f'(x) = 6x^2 + 18x$

e) $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2}{x^3} - \dfrac{3}{x^4}$

f) $f'(x) = 3x^2 + 15x^{\frac{3}{2}} + 24x + 12x^{\frac{1}{2}}$

g) $f'(x) = \dfrac{9}{5\sqrt[5]{x^2}} + \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{4}{x^2}}$

h) $f'(x) = \dfrac{5\sqrt[3]{x^2}}{3} + 7 - \dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}}$

i) $f'(x) = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{4}{5}$

j) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^2} + \dfrac{4}{x^3}$

k) $f'(x) = -\dfrac{2}{3x\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{9}{2x^2\sqrt{x}}$

l) $f'(x) = -\dfrac{1}{3} - 2x - 9x^2$

m) $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

n) $f'(x) = \dfrac{7x^2\sqrt{x}}{2}$

ñ) $f'(x) = 8x^3 - 6x$

o) $f'(x) = \dfrac{4}{x^3}$

p) $f'(x) = \dfrac{5}{2\sqrt{x}} + \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{x}} - \dfrac{3}{2}\sqrt{x}$

q) $f'(x) = \dfrac{1}{7x} - \dfrac{2}{x^2}$

r) $f'(x) = \dfrac{3\sqrt{x}}{2} + \dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}}$

s) $f'(x) = -24 + 72x$

t) $f'(x) = \dfrac{9\sqrt{x}}{2} - \dfrac{3}{2\sqrt{x}}$

u) $f'(x) = 9x^2 - 6$

v) $f'(x) = -\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^4}$

w) $f'(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2}$

x) $f'(x) = \dfrac{-1}{2x^2} + \dfrac{1}{2}$

y) $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

z) $f'(x) = \dfrac{5\sqrt{x} - 50}{2(\sqrt{x} - 5)^2}$

25 Calcula la función derivada de estas funciones.

a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x}}{2 + \sqrt{x}}$

b) $f(x) = (x^2 - x + 1) \cdot e^x$

c) $f(x) = \dfrac{x^3}{e^x}$

d) $f(x) = (x^2 + 3x - 1) \cdot (2x^3 - 1)$

e) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{2x - 1}$

f) $f(x) = \dfrac{3x}{x - 1} + \dfrac{2x}{x^2 - 1}$

g) $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}}$

h) $f(x) = \dfrac{e^{5x}}{x}$

i) $f(x) = \dfrac{e^{-3x} + 2}{e^{-3x} - 2}$

j) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{1 - \operatorname{sen} x}$

k) $f(x) = 3x \cdot \operatorname{sen} x + 4$

l) $f(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2}$

m) $f(x) = \dfrac{e^x + 1}{e^{2x}}$

n) $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{3}$

ñ) $f(x) = \dfrac{\ln 4x}{x}$

o) $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}$

p) $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{x}$

q) $f(x) = x^2 \cdot \operatorname{sen} x$

r) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x^2 - 1}$

s) $f(x) = e^x \cdot 2x + x^2$

t) $f(x) = \dfrac{e^x}{2^x}$

u) $f(x) = \ln x \cdot \text{sen}\, x$

v) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{e^x}$

w) $f(x) = x^3 \cdot 3^x$

x) $f(x) = \dfrac{1}{\ln 3x}$

y) $f(x) = e^x \cdot \cos x + 2^4$

a) $f'(x) = \dfrac{4\sqrt{x} + 3x + 2}{2\sqrt{x}\left(2 + \sqrt{x}\right)^2}$

b) $f'(x) = e^x\,(x^2 + x)$

c) $f'(x) = \dfrac{3x^2 - x^3}{e^x}$

d) $f'(x) = 10x^4 + 24x^3 - 6x^2 - 2x - 3$

e) $f'(x) = \dfrac{-4}{(2x-1)^2}$

f) $f'(x) = \dfrac{-5x^2 - 6x - 5}{(x^2-1)^2}$

g) $f'(x) = \dfrac{-\sqrt{x}}{3x\sqrt[3]{x^2}} - \dfrac{1 - \sqrt[3]{x}}{2x\sqrt{x}}$

h) $f'(x) = \dfrac{e^x(5x-1)}{x^2}$

i) $f'(x) = \dfrac{2x^{3x}}{(1 - 2e^{3x})^2}$

j) $f'(x) = 2\cos x$

k) $f'(x) = 3(\text{sen}\, x + x\cos x)$

l) $f'(x) = \dfrac{6x^2 + 2}{(x^2-1)^3}$

m) $f'(x) = -e^{-2x}(e^x + 2)$

n) $f'(x) = \dfrac{\cos x}{3}$

ñ) $f'(x) = \dfrac{1 - \ln 4x}{x^2}$

o) $f'(x) = \dfrac{-2}{(x-1)^2}$

p) $f'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

q) $f'(x) = 2x\,\text{sen}\, x + x^2\cos x$

r) $f'(x) = \dfrac{-2x^2 - 2x - 2}{(x^2-1)^2}$

s) $f'(x) = 2\,(x\,e^x + e^x + x)$

t) $f'(x) = \dfrac{e^x\,(1 - \ln 2)}{2^x}$

u) $f'(x) = \ln x \cdot \cos x + \dfrac{\text{sen}\, x}{x}$

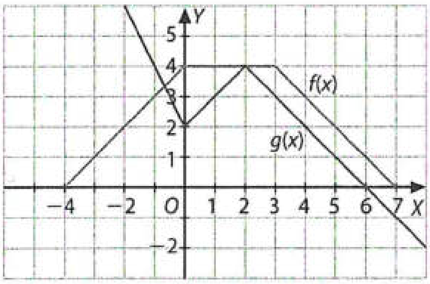
v) $f'(x) = \dfrac{1 - 2x}{2\sqrt{x} \cdot e^x}$

w) $f'(x) = 3^x \cdot x^2\,(x \cdot \ln x + 3)$

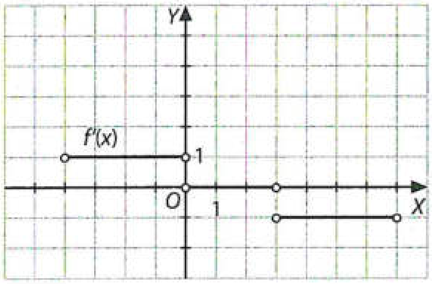
x) $f'(x) = \dfrac{-1}{x \cdot \ln^2 3x}$

y) $f'(x) = e^x\,(\cos x - \text{sen}\, x)$

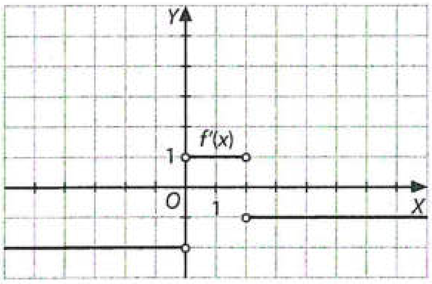
26 **Obtén, a partir de las gráficas de las funciones, las de sus funciones derivadas.**



a)



b)



Aplicaciones de la derivada

27 **Calcula cuál de estas funciones es más rápidamente creciente para $x = 2$.**

- $f(x) = 6x^3 - 4x^2 - 10x + 5$
- $g(x) = 12x^4 - 4x + 3$

Para saber cuál es más rápidamente creciente para $x = 2$, deberemos hallar el valor de la derivada de las dos funciones para $x = 2$:

$f'(x) = 18x^2 - 8x - 10 \Rightarrow f'(2) = 46$

$g'(x) = 48x^3 - 4 \Rightarrow g'(2) = 380$

Tiene la derivada mayor $g(x)$, por tanto, esta es la función más rápidamente creciente.

28 **Dada la función $f(x) = ax^2 - 3x + 5$, calcula el valor de a para que $f'(1) = 9$.**

Se calcula, en primer lugar, la derivada de la función:

$f'(x) = 2ax - 3$

En $x = 1$ tenemos: $f'(1) = 2a - 3$

Si $f'(1) = 9$, entonces: $9 = 2a - 3 \Rightarrow a = 6$

29 **La función $s(t) = 30 - 5t^2$ expresa el espacio que recorre un cuerpo en caída libre en función del tiempo, donde s se mide en metros y t en segundos.**

Calcula la velocidad media de la caída y la velocidad instantánea en $t = 2$ s y en el momento de llegar al suelo.

$v_m = -10$ m/s

$v(2) = -20$ m/s

$v(\sqrt{6}) = -10\sqrt{6}$ m/s

Los signos negativos indican que en el sistema de referencia la caída tiene velocidad negativa.

30 **Calcula la ecuación correspondiente a la recta tangente a la función $f(x) = 7x^2 + 4x - 7$ en el punto de abscisa $x = 3$.**

$f(x) = 7x^2 + 4x - 7$

$f'(x) = 14x + 4$

En el punto de abscisa 3, $f'(3) = 46$, que es la pendiente de la recta tangente en ese punto.

Calculamos el valor de la ordenada del punto de abscisa 3: $f(3) = 68$

Podemos escribir:

$y - f(3) = f'(3)(x - 3) \Rightarrow y - 68 = 46(x - 3) \Rightarrow y = 46x - 70$

31 **Halla la ecuación de la recta tangente a esta función:**

$$f(x) = 2 + \sqrt{x} \text{ en } x = \frac{3}{4}$$

$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

$f'\left(\dfrac{3}{4}\right) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

Por tanto, la ecuación punto-pendiente será:

$y - y_0 = m\,(x - x_0)$, donde $m = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$x_0 = \frac{3}{4},\ y_0 = 2 + \sqrt{\frac{3}{4}} = 2 + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Por tanto:

$$y - 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(x - \frac{3}{4}\right)$$

32 **¿En qué punto es paralela la tangente de la función $f(x) = \dfrac{x^2}{4} - 7x$ a la bisectriz del primer cuadrante? ¿Y a la del segundo?**

Para que la tangente sea paralela a la bisectriz del primer cuadrante, su pendiente debe ser 1.

$$f'(x) = \frac{x}{2} - 7 \Rightarrow \frac{x}{2} - 7 = 1 \Rightarrow x = 16$$

El punto buscado es $(16, -48)$.

Para que la tangente sea paralela a la bisectriz del segundo cuadrante, su pendiente debe ser -1.

$$f'(x) = \frac{x}{2} - 7 \Rightarrow \frac{x}{2} - 7 = -1 \Rightarrow x = 12$$

El punto buscado es $(12, -48)$.

33 **Calcula el punto de la curva $y = 2 + x + x^2$ en el que la tangente es paralela a la recta $x - y = 0$.**

La curva corresponde a una función polinómica de segundo grado, continua y derivable en $\mathbb{R}$.

La recta $x - y = 0$ tiene pendiente 1; por tanto, buscamos el punto en el que la derivada es 1:

$$y' = 1 + 2x \Rightarrow 1 = 1 + 2x \Rightarrow x = 0 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow (0, 2)$$

34 **Halla en qué punto es paralela a la recta $3x - y + 2 = 0$ la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 6x + 5$.**

La pendiente de la recta $3x - y + 2 = 0$ es 3.

La recta tangente, si debe ser paralela a esta recta, deberá tener la misma pendiente:

$$f(x) = x^2 - 6x + 5 \Rightarrow f'(x) = 2x - 6 = 3 \Rightarrow x = \frac{9}{2}$$

El punto buscado es $P\left(\dfrac{9}{2}, f\left(\dfrac{9}{2}\right)\right)$, es decir, $P\left(\dfrac{9}{2}, \dfrac{-7}{4}\right)$.

35 **Halla los puntos de tangente horizontal de la gráfica de $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2$.**

$f(x)$ es una función polinómica; por tanto, continua y derivable en $\mathbb{R}$.

Una recta horizontal tiene pendiente nula, por lo que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x$

$f'(x) = 0$ si $x(2x^2 + x - 1) = 0 \Rightarrow x(2x - 1)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -1$

Los puntos de tangente horizontal son los de abscisa $x = 0$, $x = \dfrac{1}{2}$ y $x = -1$.

36 **Averigua los puntos en los que la recta tangente a la curva de la función $f(x) = \dfrac{4}{x^2} + x$ cumple:**

a) **Es horizontal.**

b) **Es paralela a la recta $y = 2x + 3$.**

a) La pendiente de una recta horizontal es $m = 0$. Por tanto, hemos de buscar en qué punto, x_0, se cumple que $f'(x_0) = 0$:

$$f'(x) = -\frac{8}{x^3} + 1 \Rightarrow -\frac{8}{x^3} + 1 = 0 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = 1 \Rightarrow x = 2$$

El punto buscado es $P(2, f(2))$, es decir, $P(2, 3)$.

b) La pendiente de la recta dada es $m = 2$. Por tanto, hemos de buscar en qué punto, x_0, se cumple que $f'(x_0) = 2$:

$$f'(x) = \frac{-8}{x^3} + 1 \Rightarrow \frac{-8}{x^3} + 1 = 2 \Rightarrow \frac{8}{x^3} = -1 \Rightarrow x = -2$$

El punto buscado es $P(-2, f(-2))$, es decir, $P(-2, -1)$.

37 **Determina los puntos de la grafica de $f(x) = x^4 - 5x$ en los que la recta tangente es paralela a la bisectriz del segundo cuadrante. Halla las ecuaciones de estas tangentes.**

$f'(x) = 4x^3 - 5$

La pendiente de las tangentes buscadas es -1:

$$-1 = 4x^3 - 5 \Rightarrow x^3 = 1 \Rightarrow x = 1$$

Hay un punto de abscisa 1 en que la tangente es paralela a $y = -x$, $P(1, -1)$.

La recta que pasa por $P(1, -1)$ de pendiente -1 es: $y = -x$

Observa que la tangente buscada es la bisectriz del segundo cuadrante.

38 **Considera la función $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 2$:**

a) **Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x)$ en el punto de abscisa $x = 3$.**

b) **¿Existe alguna otra recta tangente a la gráfica de $f(x)$ que sea paralela a la que has hallado? Razona la respuesta y en caso afirmativo, calcula la ecuación.**

a) $f'(x) = 3x^2 - 6x + 2$

$f(3) = 8$ $\qquad$ $f'(3) = 11$

La ecuación de la recta que pasa por $(3, 8)$ de pendiente 11 es:

$$y - 8 = 11(x - 3) \Rightarrow y = 11x - 25$$

b) Buscamos en qué otro punto, $f(x)$ tiene una tangente de pendiente 11:

$f'(x) = 11 \Rightarrow 3x^2 - 6x + 2 = 11 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = 3, x = -1$

Cuando $x = -1$, la recta tangente también tiene pendiente 11.

$f(-1) = -4$; es decir, el punto es $(-1, -4)$

Recta que pasa por $(-1, -4)$ y tiene pendiente 11 es la siguiente:

$$y + 4 = 11(x + 1) \Rightarrow y = 11x + 7$$

39 **Averigua la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función $f(x) = \sqrt{x} - 2x$ paralela a la recta de ecuación $3x + 2y + 2 = 0$.**

La pendiente de la recta es $\frac{-3}{2}$. Por tanto:

$$\frac{1}{2\sqrt{x}} - 2 = \frac{-3}{2} \Rightarrow x = 1$$

Si $x = 1 \Rightarrow y = -1$

La ecuación de la recta que pasa por $(1, -1)$ y tiene pendiente $\frac{-3}{2}$ es $3x + 2y - 1 = 0$.

40 **¿En qué punto de la gráfica de la función $f(x) = \ln x$ su recta tangente es paralela a la recta $x - 3y + 1 = 0$?**

La recta $x - 3y + 1 = 0$ tiene pendiente $\frac{1}{3}$. Por tanto:

$$f'(x) = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{3} \Rightarrow x = 3$$

$f(3) = \ln 3$

El punto es $(3, \ln 3)$.

41 **¿En qué punto de la curva $y = \ln x$ la recta tangente es paralela a la cuerda que une los puntos (1, 0) y (e, 1)?**

La pendiente de la cuerda es $m = \frac{1-0}{e-1} = \frac{1}{e-1}$

$$y' = \frac{1}{x} \Rightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{e-1} \Rightarrow x = e - 1$$

42 **Averigua en qué otro punto corta a la curva de $f(x)$ la tangente a $f(x) = x^3 - x + 1$ en $x = 1$.**

$f'(x) = 3x^2 - 1 \Rightarrow f'(1) = 2$

Si $x = 1 \Rightarrow f(1) = 1$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $(1, 1)$ y tiene pendiente $m = 2$ es:

$$y = 2x - 1$$

Para saber el otro punto de intersección resolvemos el sistema:

$$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = x^3 - x + 1 \end{cases}$$

Al restar la primera ecuación a la segunda, se obtiene la ecuación $x^3 - 3x + 2 = 0$.

Por Ruffini, se obtiene $x^3 - 3x + 2 = (x - 1)^2(x + 2)$.

Es decir, la recta corta a la curva en $x = 1$, que es el punto de tangencia, y en $x = -2$.

43 **Determina los puntos en los que la recta tangente a la curva de la función $f(x) = 3x^2 - x$ en $x = -2$ corta a los ejes de coordenadas.**

$f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(-2) = -13$

Si $x = -2 \Rightarrow f(-2) = 14$

Por tanto, la ecuación de la recta que pasa por $(-2, 14)$ y tiene pendiente $m = -13$ es:

$$y = -13x - 12$$

Corta a los ejes de coordenadas en $(0, -12)$ y $(-12/13, 0)$.

44 **Calcula en qué punto corta al eje X la recta tangente a la función $f(x) = x^2 - 4x + 2$ en el punto de abscisa 1. ¿En qué punto corta al eje Y?**

En primer lugar, se calcula la ecuación de la recta tangente en el punto de abscisa 1:

$$f'(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(1) = -2$$

La ecuación de la recta tangente es, pues: $y = -2x + 1$

Para calcular los puntos de corte con el eje de abscisas:

$y = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$. El punto de corte es $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$. Para calcular los puntos de corte con el eje de ordenada: $x = 0 \Rightarrow y = 1$. El punto de corte es $(0, 1)$.

45 **Determina el punto de la curva $f(x) = -2x^2 + x$ en el que la recta tangente forma un ángulo de 135° con el eje de abscisas en sentido positivo.**

Debemos buscar un punto, x_0, tal que $f'(x_0) = -1$.

$$f'(x) = -4x + 1 \Rightarrow -4x + 1 = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el punto buscado es: $\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$, es decir: $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

46 **Dada la curva de ecuación $\frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$:**

a) **¿En qué punto tiene una recta tangente horizontal?**

b) **¿Es posible que esta curva tenga una tangente paralela a $3x - 3y + 7 = 0$ en algún punto de abscisa negativa?**

a) $f(x)$ es una función racional, continua y derivable en $\mathbb{R}$. Una recta horizontal tiene pendiente nula, por lo que $f'(x) = 0$.

$f'(x) = 16x/(x^2 + 4)^2$

$f'(x) = 0$ si $x = 0$.

$f(x)$ tiene un punto de tangente horizontal en $(0, -1)$.

b) La pendiente de la recta $3x - 3y + 7 = 0$ es $1 > 0$ y para $x < 0$, $f'(x) < 0$, luego $f(x)$ no tiene una tangente paralela a dicha recta para $x < 0$.

47 **Averigua los puntos en los que la recta tangente a la curva de la función $f(x) = x \ln x$:**

a) **Es horizontal.**

b) **Forma un ángulo de 45° con el eje X en sentido positivo.**

Se calcula la derivada de $f(x) = x \ln x \Rightarrow f'(x) = 1 + \ln x$.

a) Si la recta tangente debe ser horizontal, la derivada debe ser nula: $1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = 1/e$

b) Si la recta tangente debe formar un ángulo de 45° con el eje positivo de abscisas, la derivada de la función deberá coincidir con la tangente de 45°:

$$1 + \ln x = 1 \Rightarrow \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

48 **La recta $8x - 4y - 5 = 0$ es tangente a la curva de ecuación $y = x^2 + x - 1$. ¿En qué punto?**

$y' = 2x + 1$

La pendiente de la recta es 2, por lo que $2 = 2x + 1 \Rightarrow x = 1/2$.

Si $x = 1/2 \Rightarrow y = -1/4$. El punto de tangencia es $(1/2, -1/4)$.

49 **Determina la ecuación de la recta tangente a la curva $y = \frac{-2x}{5 - 5x}$ cuya pendiente es $-\frac{5}{2}$.**

$$y' = \frac{2}{5(1-x)^2}$$

Si $m = -5/2 \Rightarrow \frac{2}{5(1-x)^2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{3}{5}$

En el punto $(3/5, f(3/5))$ la pendiente de la tangente es $-5/2$.

$f(3/5) = -3/5$

Luego la ecuación de la tangente es $y = -3/5 - 5/2(x - 3/5)$ $\Rightarrow 25x + 10y - 9 = 0$.

50 **¿En qué punto la recta que pasa por los puntos $A(0, -1)$ y $B(-1, 1)$ es tangente a la curva $y = \frac{x^3}{2} - 2x^2 - 1$?**

La recta que pasa por A y B tiene pendiente -2, y su ecuación es $y = -2x - 1$.

$y' = \frac{3x^2}{2} - 4x \Rightarrow \frac{3x^2}{2} - 4x = -2 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ y $x = 2$, en los puntos de la curva con esta abscisa, la tangente tiene pendiente -2.

Si $x = -2/3$, $y = -55/27$; este punto no pertenece a la recta que pasa por A y B.

Si $x = 2$, $y = -5$; este punto sí pertenece a la recta que pasa por A y B.

El punto en que la recta que pasa por A y B es tangente a la curva es $(2, -5)$.

51 **Determina el punto de intersección de las rectas tangentes a las gráficas de estas funciones:**

$$f(x) = \ln x \ \text{ y } \ g(x) = -x^3 + x^2 - 2 \text{ en } x = 1$$

Buscamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $f(x) = \ln x$ en $x = 1$:

$f(1) = 0$, luego el punto es $(1, 0)$.

$f'(x) = \frac{1}{x}$, $m = f'(1) \Rightarrow m = 1$

La recta que pasa por $(1, 0)$ y tiene pendiente 1 es $y = x - 1$.

Buscamos la ecuación de la recta tangente a la gráfica de $g(x) = -x^3 + x^2 - 2$ en $x = 1$:

$g(1) = -2$, luego el punto es $(1, -2)$.

$g'(x) = -3x^2 + 2x$, $m = g'(1) \Rightarrow m = -1$

La recta que pasa por $(1, -2)$ y con pendiente -1 es $y = -x - 1$.

El punto de intersección se halla al resolver el sistema formado por las ecuaciones de las tangentes y se obtiene $P_i(0, -1)$.

52 **Determina la monotonía y la curvatura de estas funciones.**

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ ***c)*** $p(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 6$

b) $h(x) = 4x^3 - 24x$ ***d)*** $g(x) = x^3 - 3x^2$

a) $f(x) = 2x^3 + 9x^2 - 24x + 5$ $\quad f'(x) = 6x^2 + 18x - 24$

Se resuelve $f'(x) = 0$, y obtenemos $x_1 = 1$ y $x_2 = -4$. Como la derivada no tiene discontinuidades, los intervalos de monotonía serán:

$$(-\infty, -4), (-4, 1), (1, +\infty)$$

Buscamos el signo de $f'(x)$ en estos intervalos:

- $f'(x) > 0$ en $(-\infty, -4)$ la función es creciente.
- $f'(x) < 0$ en $(-4, 1)$ la función es decreciente.
- $f'(x) > 0$ en $(1, +\infty)$ la función es creciente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x + 18 = 0 \Rightarrow x = -3/2$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, -3/2) \cup (-3/2, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

b) $h(x) = 4x^3 - 24x$ $\quad h'(x) = 12x^2 - 24$

Hacemos $h'(x) = 0$ y se obtiene: $x_1 = \sqrt{2}$ y $x_2 = -\sqrt{2}$

Los intervalos de monotonía serán:

$$(-\infty, -\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, \sqrt{2}) \text{ y } (\sqrt{2}, +\infty)$$

En ellos, la función crece, decrece y crece, respectivamente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 24x = 0 \Rightarrow x = 0$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

c) $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12$

Se resuelve $f'(x) = 0$ dando como solución $x_1 = 1$ y $x_2 = 2$. Los intervalos de monotonía son: $(-\infty, 1) \cup (1, 2) \cup (2, +\infty)$ donde la función es creciente, decreciente y creciente respectivamente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 12x - 18 = 0 \Rightarrow x = 3/2$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, 3/2) \cup (3/2, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

d) $f'(x) = 3x^2 - 6x$

Se resuelve $f'(x) = 0$ dando como solución $x_1 = 0$ y $x_2 = 2$. Los intervalos de monotonía son: $(-\infty, 0) \cup (0, 2) \cup (2, +\infty)$ donde la función es creciente, decreciente y creciente respectivamente.

Para hallar los intervalos de curvatura, se estudia el signo de la segunda derivada. Para ello, en primer lugar, resolvemos $f''(x) = 0$.

$$f''(x) = 0 \Rightarrow 6x - 6 = 0 \Rightarrow x = 1$$

Los intervalos de curvatura son $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ donde la función es convexa y cóncava respectivamente.

53 **Determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento de la función $f(x) = 3x^4 + 2x^3 - 3x^2$, así como sus puntos máximos y mínimos relativos.**

$f'(x) = 12x^3 + 6x^2 - 6x = 6x(x + 1)(2x - 1)$ $f'(x) = 0$

La función es polinómica, luego derivable en todos sus puntos, y partir de los ceros de $f'(x)$, determinamos los intervalos en que $f'(x)$ tiene signo constante:

	-1	0	$1/2$	
x	$-$	$-$	$+$	$+$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$2x-1$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$+$

$f(x)$ es decreciente en $(-\infty, -1) \cup \left(0, \frac{1}{2}\right)$

$f(x)$ es creciente en $(-1, 0) \cup \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

- En $x = -1$ y en $x = \frac{1}{2}$, presenta mínimos relativos.
- En $x = 0$ presenta un máximo relativo.

54 **Halla los extremos relativos de la siguiente función polinómica:**

$$f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$$

$f(x)$ es una función polinómica, por tanto continua y derivable en $\mathbb{R}$. Para hallar los extremos relativos calculamos los puntos singulares:

$f'(x) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 2$

Estudiamos el signo de $f'(x)$ a los lados de estos puntos:

	-1	0	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$
$f(x)$	↗	↘	↗

- En $x = -1$ la función tiene un máximo relativo.
- En $x = 2$ la función tiene un mínimo relativo.

55 **A partir de los máximos y mínimos relativos de la función $f(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x - 3$ y de su comportamiento en el infinito, representa de manera aproximada su gráfica.**

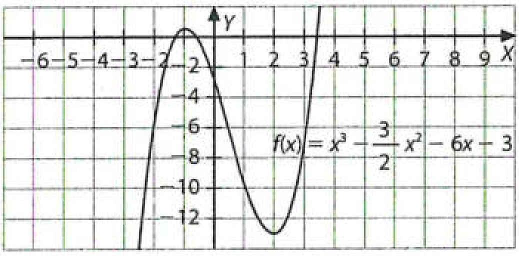
Para hallar los extremos relativos de la función, se deberá igualar a cero su derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2 \text{ y } x = -1$$

$$f(2) = -13 \text{ y } f(-1) = 1/2$$

Tenemos un extremo en el punto $(2, -13)$ y otro en el punto $(-1, 1/2)$.

Teniendo en cuenta los límites de la función, en $+\infty$ y $-\infty$, podemos representarla de forma aproximada:



56 **Estudia el crecimiento y el decrecimiento de cada una de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = 4x^3 - 3x + 1$

b) $f(x) = \dfrac{x}{x-3}$

c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2}{x+1}$

a) Dom $f = \mathbb{R}$ $\quad f'(x) = 12x^2 - 3$

Determinamos el signo de f' en $(-\infty, -1/2)$, $(-1/2, 1/2)$ y $(1/2, +\infty)$, buscando el signo de f' en un punto cualquiera de cada intervalo:

	$-1/2$	$1/2$	
f'	$+$	$-$	$+$
f	↗	↘	↗

Luego $f(x)$ es creciente en $(-\infty, -1/2) \cup (1/2, +\infty)$ y $f(x)$ es decreciente en $(-1/2, 1/2)$.

b) Dom $f = \mathbb{R} - \{3\}$ $\quad f'(x) = -3/(x-3)^2$

La derivada es siempre negativa, luego $f(x)$ es decreciente en su dominio.

c) Dom $f = \mathbb{R} - \{-1\}$ $\quad f'(x) = (x^2 + 2x + 2)/(x+1)^2$

La derivada es siempre positiva, porque el numerador no se anula y siempre es positivo, el denominador también, luego $f(x)$ es creciente en su dominio.

57 **Determina los extremos relativos de las siguientes funciones.**

a) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$

b) $f(x) = x\,e^x$

c) $f(x) = x \ln x$

a) Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada primera:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

Para determinar si los extremos son máximos o mínimos, estudiaremos los intervalos de monotonía:

$$(-\infty, -1), (-1, 0), (0, 1), (1, +\infty)$$

- Intervalo $(-\infty, -1)$: para $x = -2$, $f'(-2) > 0$; en este intervalo la función es creciente.
- Intervalo $(-1, 0)$: para $x = -0{,}5$, $f'(-0{,}5) < 0$; en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $(0, 1)$: para $x = 0{,}5$, $f'(0{,}5) < 0$; en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $(1, +\infty)$: para $x = 2$, $f'(2) > 0$; en este intervalo la función es creciente.

En el punto $(-1, -2)$ la función presenta un máximo.

En el punto $(1, 2)$, un mínimo.

b) Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada primera:

$$f'(x) = e^x(x+1) = 0 \Rightarrow x = -1$$

En el punto $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$ la función presenta un extremo relativo. Para determinar si es máximo o mínimo, estudiamos los intervalos de monotonía:

$$(-\infty, -1), (-1, +\infty)$$

- Intervalo $(-\infty, -1)$: para $x = -2$, $f'(-2) < 0$; en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $(-1, +\infty)$: para $x = 0$, $f'(0) > 0$; en este intervalo la función es creciente.

En el punto $\left(-1, \dfrac{-1}{e}\right)$ la función presenta un mínimo.

c) Para determinar los extremos relativos, igualamos a cero la derivada primera:

$$f'(x) = 1 + \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = 1/e$$

Para determinar el tipo de extremo relativo que presenta la función, estudiamos sus intervalos de monotonía:

$$\left(0, \frac{1}{e}\right), \left(\frac{1}{e}, +\infty\right)$$

- Intervalo $\left(0, \dfrac{1}{e}\right)$: para $x = 0{,}1$, $f'(0{,}1) < 0$, en este intervalo la función es decreciente.
- Intervalo $\left(\dfrac{1}{e}, +\infty\right)$: para $x = e$, $f'(e) > 0$, en este intervalo la función es creciente.

En el punto $\left(\dfrac{1}{e}, -\dfrac{1}{e}\right)$ la función presenta un mínimo.

58 **Representa las siguientes funciones.**

a) $f(x) = -2x^3 + 5x^2 - 4x + 1$

b) $f(x) = x^3 - 3x - 1$

c) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$

d) $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2}$

e) $f(x) = \dfrac{2 - x}{1 - x}$

a)
- Ramas infinitas.

$$\lim_{x \to +\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = -\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (-2x^3 + 5x^2 - 4x + 1) = +\infty$$

- Puntos de intersección con los ejes.

Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$.

Se obtiene $x = 1$ y $x = \dfrac{1}{2}$.

Los puntos de intersección son: $(1, 0)$ y $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$

Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se obtiene $f(0) = 1$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, 1)$.

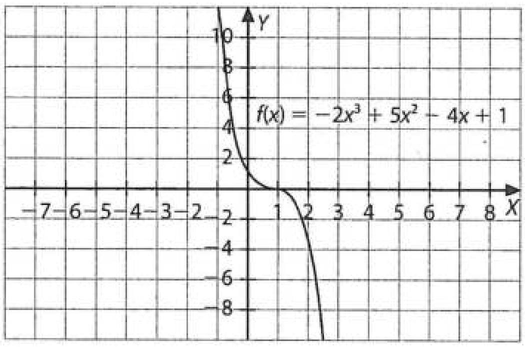
- Puntos de tangente horizontal.

Igualamos a cero la primera derivada:

$$f'(x) = -6x^2 + 10x - 4 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = \frac{2}{3}$$

Calculamos sus ordenadas: $f(1) = 0$ y $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$

Por tanto, los puntos de tangente horizontal o puntos singulares son: $(1, 0)$ y $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$



b) - Ramas infinitas.

$$\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 3x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^3 - 3x - 1) = -\infty$$

- Puntos de intersección con los ejes.

Con el eje X: se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$.

Tratando de obtener las soluciones enteras de la ecuación $x^3 - 3x - 1 = 0$ se observa que no hay soluciones enteras.

En principio, se deberá tratar de representar la función desconociendo los puntos de corte con el eje X.

Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se obtiene $f(0) = -1$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, -1)$.

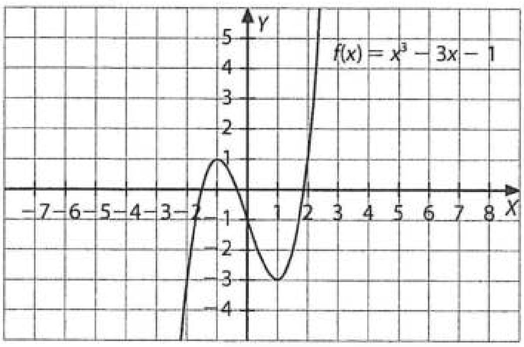
- Puntos de tangente horizontal.

Igualamos a cero la primera derivada:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ y } x = -1$$

A continuación calculamos sus ordenadas:

$f(1) = -3$ y $f(-1) = 1$. Por tanto, los puntos de tangente horizontal o puntos singulares son: $(1, -3)$ y $(-1, 0)$.



c) - Ramas infinitas

$$\lim_{x \to +\infty} (x^4 + 2x^3 - 2x - 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} (x^4 + 2x^3 - 2x - 1) = +\infty$$

- Puntos de intersección con los ejes.

Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. Se obtiene $x = 1$ y $x = -1$. Luego los puntos de intersección son: $(1, 0)$ y $(-1, 0)$.

Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se obtiene $f(0) = -1$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, -1)$.

- Puntos de tangente horizontal.

Igualamos a cero la primera derivada:

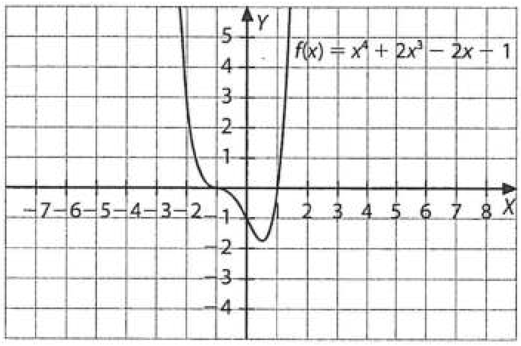
$$f'(x) = 4x^3 + 6x^2 - 2 = 0 \Rightarrow x = -1, x = -\frac{1}{2} \text{ y } x = 1$$

A continuación, calculamos sus ordenadas:

$$f(1) = 0,\ f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{16} \text{ y } f(-1) = 0$$

Por tanto, los puntos de tangente horizontal son:

$$(1, 0), \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{16}\right) \text{ y } (-1, 0)$$



d) - Ramas infinitas.

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2}\right) = 1$$

Tiene una asíntota horizontal de ecuación $y = 1$.

- Puntos de intersección con los ejes.

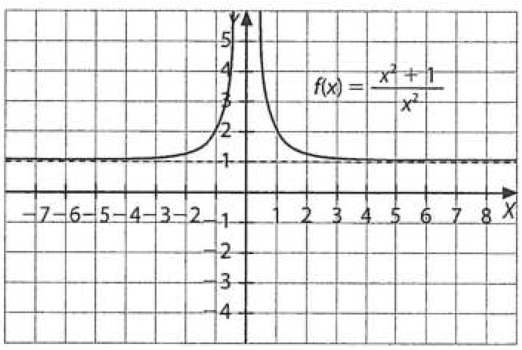
Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x) = 0$. La ecuación no tiene solución, luego la función no corta al eje de las abscisas.

Con el eje Y. Se impone $x = 0$ y se observa que este valor no pertenece al dominio, luego la función tampoco corta al eje de las ordenadas. Además, este eje de ecuación $x = 0$ es una asíntota vertical.

- Puntos de tangente horizontal.

Igualamos a cero la primera derivada:

$f'(x) = \frac{-2x}{x^4} = 0 \Rightarrow x = 0$; pero $x = 0$ no es del dominio de la función, luego no tiene puntos singulares.



e) ▪ Ramas infinitas.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=1 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2-x}{1-x}\right)=1$$

La recta $y=1$ es una asíntota horizontal. Además $x=1$ no pertenece al dominio de la función y, por tanto, la recta $x=1$ es una asíntota vertical.

▪ Puntos de intersección con los ejes.

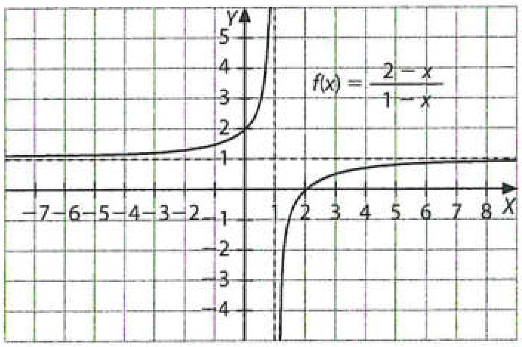
Con el eje X. Se debe resolver la ecuación $f(x)=0$. Se obtiene $x=2$. Luego la función corta al eje de las abscisas en el punto $(2, 0)$.

Con el eje Y. Se impone $x=0$ y se obtiene $f(0)=2$. El punto de intersección con el eje Y es $(0, 2)$.

▪ Puntos de tangente horizontal.

Igualamos a cero la primera derivada:

$f'(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}=0$. La ecuación anterior no tiene solución y, además, la función derivada es siempre positiva, luego la función es creciente en todo su dominio y, por tanto, no presenta puntos críticos.



Ejercicios de aplicación

59 **Dada la función $f(x)=\dfrac{mx-2}{x-1}$ donde m es un parámetro:**

a) **Determina para cada valor del parámetro m el valor del límite $\lim_{x\to 1} f(x)$, si existe.**

b) **¿Para qué valores de m la derivada de la función $f(x)$ es positiva para todo valor de x?**

a) La discontinuidad depende del parámetro m:

▪ Si $m=2$, el límite es 2 y la discontinuidad es evitable.

▪ Si $m\neq 2$, el límite no existe, la función diverge (infinito), y la discontinuidad es asintótica.

b) Si $m<2$, la derivada de la función $f(x)$ es positiva en su dominio.

60 **Halla las ecuaciones de las rectas tangentes a las curvas en su punto de intersección: $f(x)=\dfrac{x+1}{2-x}$ y $g(x)=x^2-x-2$**

¿Qué se observa?

Averiguamos su punto de intersección resolviendo el sistema

$\begin{cases} y=\dfrac{x+1}{2-x} \\ y=x^2-x-2 \end{cases}$ y obtenemos $x=-1, y=0$.

Hallamos la ecuación de la tangente a $f(x)$ en $x=-1$:

$$f'(x)=\frac{3}{(2-x)^2}\Rightarrow f'(-1)=\frac{1}{3}$$

La recta que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente $1/3$ es $y=\frac{1}{3}(x+1)$.

Hallamos la ecuación de la tangente a $g(x)$ en $x=-1$:

$$g'(x)=2x-1\Rightarrow g'(-1)=3$$

La recta que pasa por $(-1, 0)$ y tiene pendiente 3 es $y=-3(x+1)$.

Las dos tangentes son perpendiculares.

61 **Escribe las ecuaciones de las rectas tangentes a la función $f(x)=x^3+3x^2+x$ en los puntos de intersección con la bisectriz del primer cuadrante.**

Hay que determinar los puntos de intersección de la curva de la función con la bisectriz del primer cuadrante:

$\begin{cases} y=x^3+3x^2+x \\ y=x \end{cases} \Rightarrow$ se resuelve el sistema y se obtiene $x=0$ y $x=-3$, por lo que los puntos de intersección son $(0, 0)$ y $(-3, -3)$.

En $x=0$, la pendiente de la tangente será $f'(0)$:

$$f'(x)=3x^2+6x+1\Rightarrow f'(0)=1$$

La ecuación punto-pendiente es $y-0=1\,(x-0)\Rightarrow y=x$.

En $x=-3$, la pendiente de la recta tangente será $f'(-3)$. Como $f'(x)=3x^2+6x+1\Rightarrow f'(-3)=10$:

La ecuación punto pendiente será $y+3=10(x+3)$, es decir, $10x-y+27=0$.

62 **Calcula el área del triángulo que forman los semiejes positivos de coordenadas y la recta que es tangente a la curva $y=\dfrac{x^2}{2}-2x+\dfrac{3}{2}$ en $x=1$.**

En $x=1, y=0$. El punto es $(1, 0)$.

La pendiente de la tangente en $x=1$ es $y'=x-2\Rightarrow m=-1$

La ecuación de la recta que pasa por $(1, 0)$ y tiene pendiente -1 es $y=-x+1$.

La recta corta a los ejes en $(1, 0)$ y $(0, 1)$, por lo que el área del triángulo es $A=1/2\ u^2$.

63 **Calcula una función de segundo grado del tipo:**

$$f(x)=x^2+bx+c$$

sabiendo que su gráfica pasa por el punto de coordenadas $(1, 3)$ y que en el punto de abscisa 2 su tangente tiene pendiente igual a 1.

Si en el punto de abscisa 2 la tangente tiene de pendiente 1, quiere decir que la derivada para $x=2$ es 1:

$$f'(x)=2x+b\Rightarrow 1=4+b\Rightarrow b=-3$$

Si, además, la función pasa por el punto $(1, 3)$, se tiene:

$$f(x)=x^2-3x+c\Rightarrow 3=1-3+c\Rightarrow c=5$$

La función de segundo grado es: $y=x^2-3x+5$

64 **Calcula los valores de b y c para que la función de ecuación $f(x)=x^2+bx+c$ tenga un extremo relativo en el punto $(-1, -4)$. ¿Qué tipo de extremo es?**

$f'(x)=2x+b$

$f(-1)=4\Rightarrow 4=1-b+c$

$f'(-1)=0\Rightarrow 0=-2+b\Rightarrow b=2, c=5$

Se trata de un mínimo porque es una parábola con el coeficiente del término de segundo grado positivo.

65 **Halla los coeficientes a, b y c de la función de ecuación $f(x)=ax^2+bx+c$, sabiendo que la recta $y=-x+1$ es tangente a la curva $y=f(x)$ en el punto $(1, 0)$ e $y=f(x)$ corta el eje de ordenadas en $y=3$.**

Pasa por el punto $P(1, 0)$ donde es tangente a una recta con pendiente -1:

$f(1)=0\Rightarrow 0=a+b+c$

$f'(1)=-1\Rightarrow 2a\cdot 1+b=-1$

También pasa por el punto $Q(0, 3)$:

$$f(0) = 3 \Rightarrow a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = 3$$

Resolviendo el sistema formado por estas 3 ecuaciones, obtenemos: $a = 2, b = -5, c = 3$

66 **Dada la función:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x^3 + 2x + a & \text{si } x < 1 \\ bx^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

a) **Calcula *a* y *b* para que la función sea continua y derivable en $x = 1$.**

b) **Calcula la ecuación de la recta tangente a la curva $f(x)$ en $x = 1$.**

a) Si la función debe ser continua, se ha de cumplir que $f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = b + 1$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 1^-} f(x) = 4 + a \\ \lim_{x \to 1^+} f(x) = b + 1 \end{array}\right\} \Rightarrow 4 + a = b + 1$$

Si $f(x)$ ha de tener derivada en $x = 1$, se debe cumplir que:

$f'_-(x) = 6x^2 + 2 \Rightarrow f'_-(1) = 8$

$f'_+(x) = 2bx \Rightarrow f'_+(1) = 2b \Rightarrow f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow 8 = 2b$

Por tanto, $b = 4$, y $a = b - 3$, es decir: $a = 4 - 3 = 1$

b) Como $f'(1) = 8$, y $f(1) = 5$, la ecuación punto pendiente será $y - 5 = 8(x - 1)$, es decir: $8x - y - 3 = 0$

67 **Halla *a* y *b* para que la función:**

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 & \text{si } x \leq 1 \\ ax + b & \text{si } x > 1 \end{cases} \text{ sea derivable en } \mathbb{R}.$$

Dado que los dos trozos de esta función son polinomios, la función será derivable en $\mathbb{R}$ si:

- Es continua en $\mathbb{R}$, imponemos que lo sea en $x = 1$:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) = 2 \Rightarrow a + b = 2$$

- Es derivable en $\mathbb{R}$, imponemos que lo sea en $x = 1$:

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1 + h)^3 + (1 + h)^2}{h} = 4$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1 + h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{a(1 + h) + b - 2}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{a + b + ah - 2}{h} = a$$

$f'_-(1) = f'_+(1) \Rightarrow a = 5, b = -3$

68 **Halla dos números tales que el doble del primero más el triple del segundo sea 24 y que su producto sea máximo.**

Sean los números *x* e *y*, y su producto $P = x \cdot y$.

Como $2x + 3y = 24$, tenemos que $x = \frac{24 - 3y}{2}$.

Sustituyendo: $P = \frac{(24 - 3y)y}{2} = \frac{24y - 3y^2}{2}$

P tiene su valor máximo en $y = 4$, por lo que $x = 6$.

69 **Entre todos los rectángulos de perímetro 36, halla el que tiene área máxima.**

$A = b \cdot h$

Como $36 = 2b + 2h \Rightarrow 18 = b + h \Rightarrow b = 18 - h$

$A = 18h - h^2 \Rightarrow A' = 18 - 2h$

Si $h = 9$, entonces $A' = 0$.

Como $A'' < 0$ siempre, la función área tiene un máximo en $h = 9$.

Por tanto, el rectángulo de mayor área es un cuadrado de lado 9.

70 **De entre todos los triángulos rectángulos de área 1, averigua las dimensiones del que tiene hipotenusa mínima.**

$h = \sqrt{b^2 + c^2}$

Como $A = 1 = \frac{b \cdot c}{2} \Rightarrow c = \frac{2}{b}$

$h = \sqrt{b^2 + \frac{4}{b^2}} = \sqrt{\frac{b^4 + 4}{b^2}}$

El radicando debe ser mínimo, por lo que debemos hallar el mínimo de la función h^2. En $(0, +\infty)$ la función es continua y tiende a $+\infty$ en los extremos, por lo que su mínimo absoluto corresponderá a un mínimo relativo:

$(h^2)' = \frac{2b^4 - 8}{b^3}$; si $b = \sqrt{2}$, entonces $(h^2)' = 0$.

Para comprobar que es un mínimo no hace falta calcular la derivada segunda: es suficiente observar el signo de la derivada primera para $b = 1$ y para $b = 1{,}5$, y se deduce que es un mínimo. Por tanto, el triángulo rectángulo de hipotenusa mínima con área 1 es el triángulo isósceles cuyos catetos son iguales a $\sqrt{2}$ y cuya hipotenusa es 2.

71 **Determina la mayor área que puede encerrar un triángulo rectángulo cuyo lado mayor mida 1 metro.**

$A = ba/2$

Por el teorema de Pitágoras: $1 = b^2 + a^2$, $a^2 = 1 - b^2$, donde *a* y *b* son los catetos.

$$A = \frac{b\sqrt{1 - b^2}}{2} \qquad A' = \frac{\sqrt{1 - b^2}}{2} - \frac{b^2}{2\sqrt{1 - b^2}}$$

Si $A' = 0$ entonces $b = a = \sqrt{2}/2$ y $A = 1/4\ \text{u}^2$

Evaluación (página 339)

1. **Calcula la tasa de variación instantánea de las siguientes funciones en el punto $x = 2$.**

a) $f(x) = x^2$ ***b)*** $g(x) = \sqrt{x + 1}$ ***c)*** $h(x) = \frac{1}{x}$

a) $\lim_{h \to 2} \frac{h^2 - 4}{h - 2} = \lim_{h \to 2} (h + 2) = 4$

b) $\lim_{h \to 2} \frac{\sqrt{h + 1} - \sqrt{3}}{h - 2} = \frac{1}{2 + \sqrt{3}}$

c) $\lim_{h \to 2} \frac{\frac{1}{h} - \frac{1}{2}}{h - 2} = \frac{-1}{4}$

2. **Halla la recta tangente y normal a la función $f(x) = \frac{x - 1}{x + 1}$ en el punto $x = -2$.**

$x = -2 \Rightarrow f(-2) = 3$ $\quad f'(x) = \frac{2}{(x + 1)^2} \Rightarrow f'(-2) = \frac{2}{(-2 + 1)^2} = 2$ Recta tangente: $y - 3 = 2(x + 2)$ Recta normal: $y - 3 = -\frac{1}{2}(x + 2)$

3. Estudia la continuidad y derivabilidad de la siguiente función: $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ x & \text{si } -1 < x \leq -1 \\ -x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

La función está formada por tres trozos compuestos por polinomios. Así pues, en cada intervalo, la función es continua y derivable. Hay que ver la continuidad y derivabilidad en los puntos de unión. En este caso la función no es continua en esos puntos ya que tiene discontinuidades de salto finito. Por tanto, al no ser continua, tampoco es derivable.

4. Calcula la función derivada de las siguientes funciones.

a) $f(x) = 3\text{sen}^2(3x)$ ***b)*** $f(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$ ***c)*** $f(x) = e^x \cdot \ln(\text{sen}(x))$ ***d)*** $f(x) = \ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ ***e)*** $f(x) = e^{x^2} - \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ ***f)*** $f(x) = \ln(x^2 - 1)$

a) $f'(x) = 3 \cdot 2 \cdot \text{sen}(3x) \cdot \cos(3x) \cdot 3 = 9 \cdot \text{sen}(6x)$

b) $f'(x) = \dfrac{-1 \cdot [-\text{sen}(x)]}{[\cos(x)]^2} = \dfrac{+\text{sen}(x)}{\cos^2(x)}$

c) $f'(x) = e^x \cdot Ln[\text{sen}(x)] + e^x \cdot \dfrac{\cos(x)}{\text{sen}(x)}$

d) $f'(x) = \dfrac{1}{\dfrac{x}{x+1}} \cdot \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{x^2 + x}$

e) $f'(x) = 2x \cdot e^{x^2} - \dfrac{1}{\dfrac{1}{x}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} = 2x \cdot e^{x^2} + \dfrac{1}{x}$

f) $f'(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1} \cdot 2x = \dfrac{2x}{(x^2 - 1)}$

5. Estudia la monotonía de las siguientes funciones.

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ ***b)*** $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ ***c)*** $f(x) = x^3 - 27x$ ***d)*** $f(x) = x^5 - 5x$

a) $f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}$ $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$ $f'(x) > 0, x \in (-\infty, 0) \Rightarrow f'(x)$ creciente $f'(x) < 0, x \in (0, +\infty) \Rightarrow f(x)$ decreciente

Como la derivada no se anula no hay máximos ni mínimos.

b) $f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 2}}$ $D(f) = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ $f'(x) < 0, x \in (-\infty, -1) \Rightarrow f(x)$ decreciente $f'(x) < 0, x \in (1, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente

c) $f'(x) = 3x^2 - 27$ $f'(x) < 0, x \in (-\infty, -3) \cup (3, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente $f'(x) < 0, x \in (-3, 3) \Rightarrow f(x)$ decreciente
Para $x = -3$ es un máximo de la función y para $x = 3$ es un mínimo

d) $f'(x) = 5x^4 - 5$ $f'(x) > 0, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f(x)$ creciente $f'(x) < 0, x \in (-1, 1) \Rightarrow f(x)$ decreciente
Para $x = -1$ se tiene un máximo y para $x = 1$ un mínimo.

6. Calcula los puntos de inflexión y estudia la curvatura de esta función: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$

Se deriva la función dos veces resultando: $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - 1} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{-2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f''(x) = \dfrac{2(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^2}$

Como la ecuación $f''(x) = 0$ no tiene soluciones, la función no tiene puntos de inflexión. Para ver la curvatura se estudia el signo de la segunda derivada: $f''(x) > 0, x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty) \Rightarrow f(x)$ cóncava. $f''(x) < 0, x \in (-1, 1) \Rightarrow f(x)$ convexa.

7. Halla una función $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ tal que tenga un punto de inflexión en $x = -1$ y un extremo relativo en el punto $P(1, 20)$.

$$\left.\begin{array}{l} \text{Hay un punto de inflexión en } x = -1 \Rightarrow f''(-1) = 0 \\ \text{Hay un extremo relativo en } P(1, 20) \Rightarrow f'(1) = 0 \text{ y } f(1) = 20 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} b + c + d = 19 \\ 2b + c = -3 \\ 2b = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d = 25 \\ c = -9 \Rightarrow f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 25 \\ b = 3 \end{cases}$$

8. Calcula la base del triángulo isósceles cuyo perímetro mide 8 cm y su área es máxima.

Planteamos la función a optimizar siendo el lado desigual $2x$ y la altura y: $f(x, y) = \dfrac{2x \cdot y}{2} = x \cdot y$

Si l es el lado igual, tenemos: $2l + 2x = 8 \Rightarrow l = 4 - x$. Por Pitágoras, se deduce que: $y = \sqrt{(4 - x)^2 - x^2}$
Sustituyendo en la función obtenemos: $f(x) = x\sqrt{(4 - x)^2 - x^2}$
Para optimizar esta función se halla la primera derivada, se iguala a cero y se obtiene $x = 4/3$. Por tanto, la base mide 8/3 cm.

9. ¿Cuál es el perímetro mínimo que puede tener un sector circular de 25 m² de área?

La función que calcula el perímetro dependiendo del radio del sector es: $P = 2r + \dfrac{2\pi r\alpha}{360}$

La restricción del problema impone que el área del sector valga 25 cm². Así: $25 = r^2\pi\dfrac{\alpha}{360} \Rightarrow \alpha = \dfrac{25 \cdot 360}{r^2\pi}$

Sustituyendo el valor de α en la función del perímetro se tiene que $f(r) = 2r + \dfrac{50}{r}$. Optimizando esta función se obtiene que $r = 5$ y por tanto el perímetro es 20 cm.