9 Cuerpos geométricos

RELACIONA Y CONTESTA

Platón, filósofo griego, había sostenido un modelo geométrico para explicar la estructura del Universo. Los cinco poliedros regulares, los sólidos platónicos, se correspondían con el espacio y los cuatro elementos fundamentales: tierra, agua, aire, fuego. ¿Cuáles son esos cinco sólidos?

Los sólidos platónicos son el tetraedro, el cubo o hexaedro, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro.

¿Por qué Celaya los llama "sólidos perfectos"?

Celaya llamaba sólidos perfectos a los sólidos platónicos porque son los únicos poliedros regulares que existen. Es decir, el tetraedro, el cubo, el octaedro, el dodecaedro y el icosaedro son los únicos poliedros cuyas caras son polígonos regulares iguales y en todos sus vértices concurren el mismo número de aristas.

INTERPRETA Y SACA CONCLUSIONES

Kepler siguiendo las ideas de Platón pensó que los planetas giraban en órbitas que encajaban con los sólidos platónicos. Y cada uno producía al girar alrededor del Sol un tono musical. A eso se refiere Celaya cuando habla del "orden musical hasta la gran esfera". Estaba equivocado y él mismo lo demostró al formular sus famosas leyes de Kepler. ¿Cómo son las órbitas de los planetas?

Las órbitas de los planetas son elípticas.

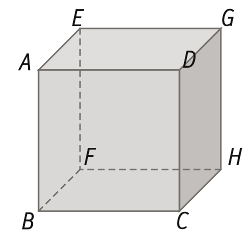
"*Y él buscaba el defecto del bello teorema*". ¿Puede un teorema ser bello? ¿Qué crees que quiere decir Celaya en este verso?

Respuesta libre

Actividades propuestas

1. Actividad resuelta

2. Observa el cubo e indica:



a) Dos caras paralelas.

b) Dos caras secantes y la arista donde se cortan.

c) Dos aristas secantes y su punto de corte.

d) Dos aristas que se cruzan. ¿Por qué son perpendiculares?

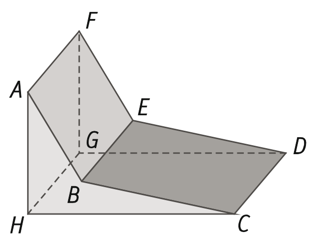
a) Las caras *ABCD* y *EFHG* son paralelas.

b) Las caras *ABFE* y *AEGD* son secantes y se cortan en la arista *AE*.

c) Las aristas *CH* y *GH* son secantes y se cortan en el punto *H*.

d) Las aristas *AE* y *BC* se cruzan. Además, *AE* y *BC* son perpendiculares porque la cara que contiene a la arista *AE*, *ABFE*, es perpendicular a la arista *BC*.

3. En el siguientes cuerpo geométrico, indica:



a) Dos aristas secantes perpendiculares.

b) Dos aristas que se crucen y sean perpendiculares.

c) Dos aristas que se crucen y que no sean perpendiculares.

a) Las aristas *AH* y *HC* se cortan perpendicularmente en el punto *H*.

b) Las aristas *HC* y *BE* se cruzan.

Además son perpendiculares ya que el plano que contiene a *HC*, *ABCH*, es perpendicular a *BE*.

c) Las aristas *AB* y *CD* se cruzan y no son perpendiculares.

4. **Actividad resuelta**

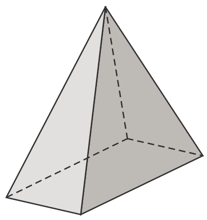
5. **Indica el número de caras, vértices y aristas de un tetraedro regular y de un octaedro regular. Comprueba que se cumple la fórmula de Euler.**

Un tetraedro regular tiene 4 caras, 4 vértices y 6 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 4 + 4 = 6 + 2.

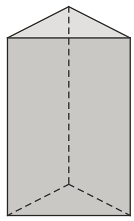
Un octaedro regular tiene 8 caras, 6 vértices y 12 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 8 + 6 = 12 + 2.

6. **Dibuja en tu cuaderno una pirámide de base rectangular, un prisma triangular regular y una pirámide pentagonal regular.**

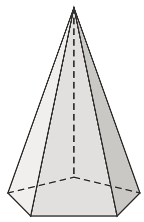
Pirámide rectangular



Prisma triangular regular

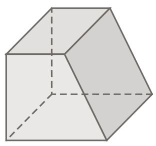


Pirámide pentagonal regular

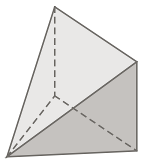


7. **Clasifica los siguientes poliedros y comprueba que en todos los casos se cumple la fórmula de Euler.**

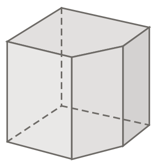
a)



b)



c)



a) El poliedro es un prisma cuadrangular recto.
Tiene 6 caras, 8 vértices y 12 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 6 + 8 = 12 + 2.

b) El poliedro es una pirámide cuadrangular oblicua.
Tiene 5 caras, 5 vértices y 8 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 5 + 5 = 8 + 2.

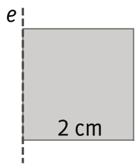
c) El poliedro es un prisma pentagonal recto.
Tiene 8 caras, 12 vértices y 18 aristas. Se verifica la fórmula de Euler porque 8 + 12 = 18 + 2.

8. **Actividad interactiva**

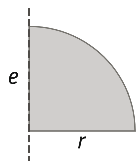
9. **Actividad resuelta**

10. **Describe los cuerpos de revolución obtenidos al girar estas figuras alrededor del eje *e*. Indica sus elementos.**

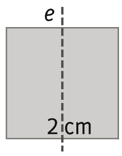
a)



b)



c)



a) Se obtiene un cilindro de altura 2 cm y cuyo radio de la base mide 2 cm.

b) Se obtiene una semiesfera de radio *r*.

c) Se obtiene un cilindro de 2 cm de altura y cuyo radio de la base mide 1 cm.

11. Describe los cuerpos de revolución, y sus elementos, que se obtienen al girar:

a) Un triángulo equilátero de 5 cm de lado alrededor de su altura.

b) Un triángulo rectángulo de 10 cm de altura alrededor de su base.

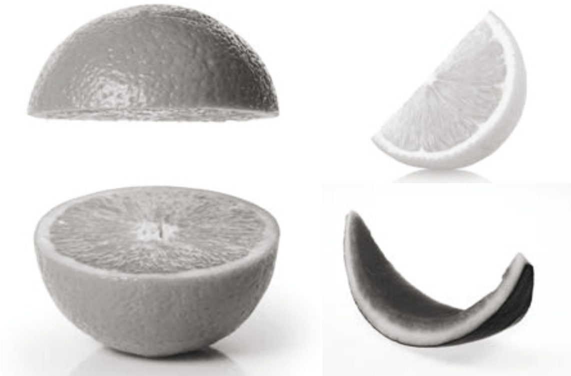
c) Un trapecio isósceles de lados 5 cm, 5 cm, 7 cm y 11 cm alrededor de un eje que pasa por los puntos medios de las bases.

a) Se obtiene un cono de $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm de altura, cuya generatriz mide 5 cm y el radio de la base 2,5 cm.

b) Se obtiene un cono de 10 cm de altura.

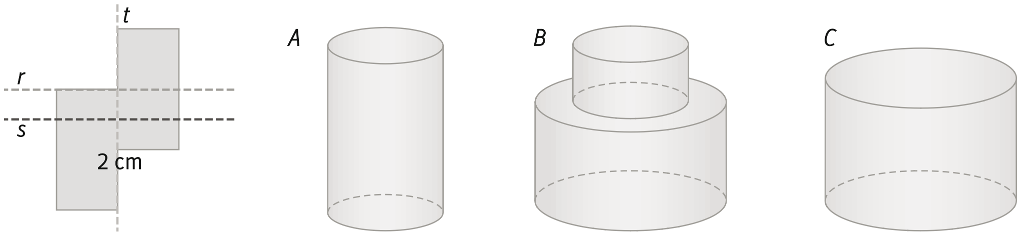
c) Se obtiene un tronco de cono de $\sqrt{21}$ cm de altura, cuyas bases mayor y menor tienen 5,5 y 3,5 cm de radio, respectivamente.

12. Dados los siguientes objetos, determina a qué parte de la superficie esférica o de la esfera se asemeja cada uno.



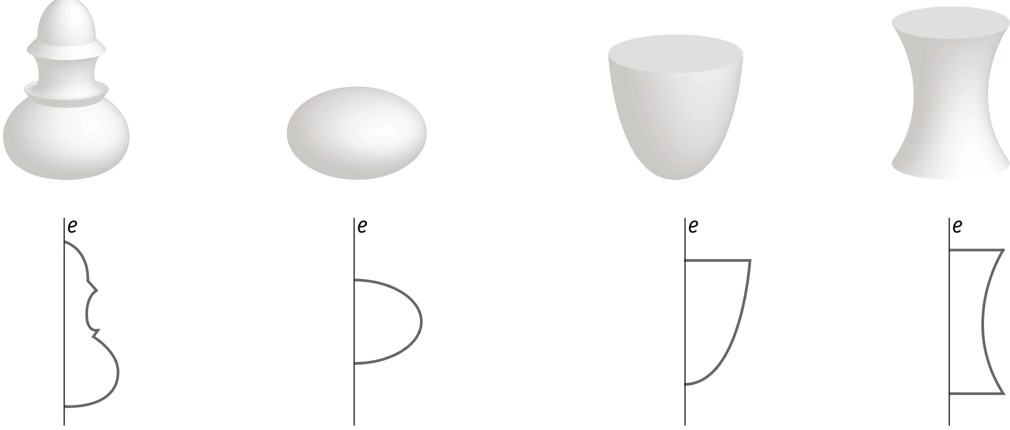
El primer trozo de naranja se asemeja a un casquete esférico, el segundo trozo de naranja a una semiesfera o hemisferio, el limón a una cuña esférica y el trozo de sandía a un huso esférico.

13. Asocia el eje sobre el cual tiene que girar la figura plana con el cuerpo de revolución que se genera.



A. Sobre el eje *t*. **B.** Sobre el eje *r*. **C.** Sobre el eje *s*.

14. Dibuja en cada caso la figura plana y el eje sobre el cual gira para generar cada uno de estos cuerpos.



15. Calcula el área total y el volumen de estos cuerpos.

a) Un cubo de 10 cm de arista.

b) Un prisma regular de 10 cm de altura, cuya base es un cuadrado de 20 cm de lado.

c) Un cilindro de 10 cm de radio de la base y altura igual al diámetro de la base.

d) Un cono de 8 cm de radio de la base y 16 cm de altura.

e) Una esfera de 10 m de diámetro.

a) $A_T = A_L + 2A_B = 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^2 = 400 + 200 = 600$ cm^2

$V = A_B \cdot h = 10^2 \cdot 10 = 1000$ cm^3

b) $A_T = A_L + 2A_B = 4 \cdot 20 \cdot 10 + 2 \cdot 20^2 = 800 + 800 = 1600$ cm^2

$V = A_B \cdot h = 20^2 \cdot 10 = 4000$ cm^3

c) $A_T = A_L + 2A_B = 2\pi \cdot 10 \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot 10^2 = 1256{,}64 + 628{,}32 = 1884{,}96$ cm^2

$V = A_B \cdot h = 2 \cdot \pi \cdot 10^2 \cdot 10 = 6283{,}19$ cm^3

d) La generatriz se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{16^2 + 8^2} = 17{,}89$ cm

$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot 8 \cdot 17{,}89 + \pi \cdot 8^2 = 449{,}62 + 201{,}06 = 650{,}68$ cm^2

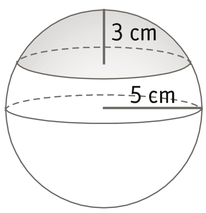
$$V = \frac{A_b \cdot h}{3} = \frac{201{,}06 \cdot 16}{3} = 1072{,}32 \text{ cm}^3$$

e) $A_T = 4\pi \cdot 5^2 = 314{,}16$ cm^2

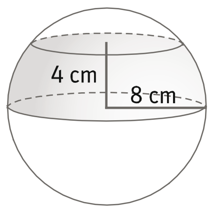
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 5^3 = 523{,}60 \text{ cm}^3$$

16. Halla el área de cada una de las siguientes partes de la esfera.

a)



b)



a) La parte de la esfera sombreada es un casquete esférico.

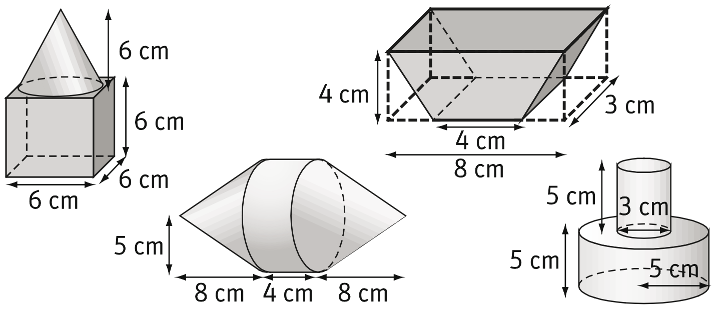
$A = 2\pi \cdot 5 \cdot 3 = 94{,}25$ cm^2

b) La parte de la esfera sombreada es una zona esférica.

$A = 2\pi \cdot 8 \cdot 4 = 201{,}06$ cm^2

17. Actividad resuelta

18. Calcula el área y el volumen de las siguientes figuras.



a) La generatriz del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{6^2 + 3^2} = 6{,}71$ cm

$A_T = A_{Tcubo} + A_{Lcono} - A_{Bcono} = 6 \cdot 6^2 + \pi \cdot 3 \cdot 6{,}71 - \pi \cdot 3^2 = 216 + 63{,}24 - 28{,}27 = 250{,}97$ cm^2

$V = V_{cono} + V_{cubo} = \dfrac{28{,}27 \cdot 6}{3} + 6^3 = 272{,}54$ cm^3

b) La generatriz del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{8^2 + 5^2} = 9{,}43$ cm

$A_T = 2 \cdot A_{Lcono} + A_{Lcilindro} = 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 9{,}43 + 2 \cdot \pi \cdot 5 \cdot 4 = 296{,}25 + 125{,}66 = 421{,}91$ cm^2

$V = 2 \cdot V_{cono} + V_{cilindro} = 2 \cdot \dfrac{\pi \cdot 5^2 \cdot 8}{3} + \pi \cdot 5^2 \cdot 4 = 418{,}88 + 314{,}16 = 733{,}04$ cm^3

c) El lado oblicuo del trapecio isósceles de la cara lateral mide $d = \sqrt{4^2 + 2^2} = 4{,}47$ cm

$A_T = A_B + A_b + 2 \cdot A_{trapecio} + 2 \cdot A_{rectángulo} = 8 \cdot 3 + 4 \cdot 3 + 2 \cdot \dfrac{8+4}{2} \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot 4{,}47 = 24 + 12 + 48 + 26{,}83 =$
$= 110{,}83$ cm^2

$V = V_{ortoedro} - 2 \cdot V_{prisma} = 3 \cdot 8 \cdot 4 - 2 \cdot \dfrac{2 \cdot 4}{2} \cdot 3 = 96 - 24 = 72$ cm^3

d) $A_T = A_{Tcilindro\ inferior} + A_{Lcilindro\ superior} = 2\pi \cdot 5 \cdot 5 + 2\pi \cdot 5^2 + 2\pi \cdot 1{,}5 \cdot 5 = 157{,}08 + 157{,}08 + 47{,}12 = 361{,}28$ cm^2

$V = V_{cilindro\ inferior} + V_{cilindro\ superior} = \pi \cdot 5^2 \cdot 5 + \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 5 = 392{,}70 + 35{,}34 = 428{,}04$ cm^3

19. Actividad interactiva

20. Actividad resuelta

21. Indica si existen otros centros, ejes y planos de simetría en el cubo del ejemplo.

- Centros de simetría.

  El cubo tiene únicamente un centro de simetría. Por tanto, no hay más centros de simetría que el centro del ejemplo.

- Ejes de simetría.

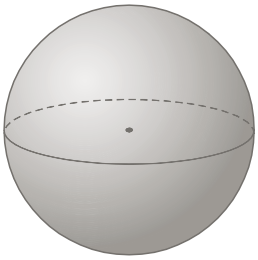
  El cubo tiene un eje de simetría por cada dos caras paralelas (une sus centros). Es decir, el del ejemplo y 2 más. Además, hay 4 ejes más que pasan por los vértices opuestos con respecto al centro. Por último, hay 6 ejes más que pasan por los puntos medios de las aristas opuestas entre sí. Por tanto, el cubo tiene 13 ejes de simetría; el del ejemplo y 12 más

- Planos de simetría.

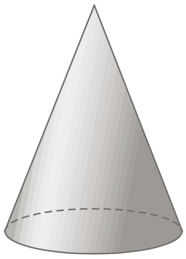
  Hay 3 planos de simetría paralelos a las caras opuestas. Hay, además, 6 planos de simetría que contienen dos aristas opuestas. Por tanto, el cubo tiene 9 planos de simetría, el del ejemplo y 8 más.

22. Copia en tu cuaderno las siguientes figuras, e indica, si existen, un centro, un eje y un plano de simetría.

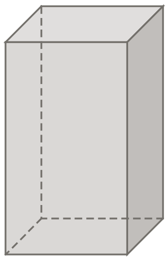
a)



b)



c)



a) Esfera:

- Tiene un centro de simetría, que es el centro de la esfera.
- Tiene infinitos ejes de simetría. Todos los ejes que pasan por el centro de la esfera.
- Tiene infinitos planos de simetría. Todos los planos que contengan al centro de la esfera.

b) Cono:

- No tiene centro de simetría.
- Tiene un eje de simetría. Eje que va del centro de la base al vértice del cono.
- Tiene infinitos planos de simetría. Cualquier plano que contenga al eje de simetría.

c) Ortoedro:

- Tiene centro de simetría, que es el centro del ortoedro.
- Tiene 3 ejes de simetría. Un eje es la recta perpendicular a las bases por su punto medio y dos ejes son las rectas paralelas a las bases que pasan por el centro de cada dos caras laterales.
- Tiene 3 planos de simetría. Un plano es el que pasa por los puntos medios de las aristas laterales y 2 planos que pasan por los puntos medios de las aristas de la base.

23. Actividad interactiva

24. Actividad resuelta

25. Dos puntos de la esfera terrestre están situados en el mismo meridiano y sus latitudes son de 40º N y 32º N. Calcula la distancia que los separa.

Hay que calcular la longitud de un arco de 40º – 32º = 8º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 8 = 889{,}56 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 889,56 km.

26. Busca en un mapa las coordenadas geográficas de Londres, París, Berlín, Roma, Atenas y Lisboa.

Londres: 51º 30´ 25″ N 0º 7´ 39″ O

París: 48º 51´ 24″ N 2º 20´ 27″ E

Berlín: 52º 31´ 7″ N 13º 24´ 30″ E

Roma: 41º 53´ 26″ N 12º 29´ 39″ E

Atenas: 37º 58´ 40″ N 23º 43´ 40″ E

Lisboa: 38º 42´ 49″ N 9º 8´ 21″ O

27. Razona en cada caso si es verdadero o falso.

a) El Ecuador es la única circunferencia máxima de la Tierra.

b) Cada huso horario tiene una amplitud de 15º, porque 360º : 24 = 15º.

c) Los puntos de un paralelo tienen la misma longitud.

a) Falso. El único paralelo que es una circunferencia máxima es el ecuador, pero las circunferencias que contienen a los meridianos también son circunferencias máximas.

b) Verdadero. La esfera terrestre se divide en 24 husos de 15º de amplitud.

c) Falso. Todos los puntos de un paralelo tienen la misma latitud geográfica, no la misma longitud.

28. El radio medio de la Tierra es de 6371 km.

a) Calcula la longitud del ecuador.

b) Calcula la superficie y el volumen de la Tierra.

c) Halla la superficie de uno de los casquetes polares, sabiendo que estos son el resultado de cortar la superficie terrestre por un plano a 5843 km de distancia del centro de la Tierra.

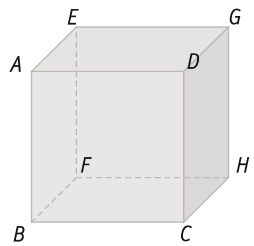
a) $L = 2 \cdot \pi \cdot 6371 = 40\,030{,}17$ km

b) $A = 4 \cdot \pi \cdot 6371^2 = 510\,064\,471{,}9$ km^2

$$V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371^3 = 1\,083\,206\,917\,000 \text{ km}^3$$

c) $A = 2\pi \cdot 6371 \cdot (6371 - 5843) = 21\,135\,931{,}66$ km^2

29. Observa el siguiente cubo:



a) Indica todas las caras a las que pertenece el vértice *A*.

b) Indica todas las caras que contengan a la arista *FH*.

c) Indica una arista contenida en la cara superior y otra que no lo esté.

d) ¿Existen dos aristas secantes que no sean perpendiculares?

e) Demuestras que las aristas *EF* y *BC* son perpendiculares.

a) El vértice *A* pertenece a las caras *ABFE*, *ABCD* y *ADGE*.

b) La arista *FH* está contenida en las caras *EFHG* y *BCFH.*

c) La arista *AD* está contenida en la cara superior pero la arista *BC* no lo está.

d) No existe ninguna pareja de aristas que sean secantes pero no perpendiculares.

e) Las aristas *EF* y *BC* son perpendiculares porque el plano que contiene a la arista *EF*, *ABFE*, es perpendicular a *BC*.

30. Un tetraedro regular tiene por vértices los puntos *A*, *B*, *C* y *D*.

a) Indica dos caras secantes y la arista donde se cortan. ¿Son perpendiculares?

b) Indica dos aristas que se crucen. ¿Son perpendiculares?

a) Las caras *ABD* y *BCD* son secantes y se cortan en la arista BD. No son perpendiculares.

b) Las aristas *AD* y *CB* se cruzan y son perpendiculares.

31. Calcula el área de estos cuerpos geométricos:

a) Un ortoedro de dimensiones 15 × 18 × 22 cm.

b) Un prisma regular de 3 m de altura y de base pentagonal de 50 m de perímetro de la base y 6,88 m de apotema.

c) Una pirámide regular de 5 dm de altura y cuya base es un triángulo equilátero de 5 dm de lado.

d) Un cilindro de 20 cm de altura y cuyo perímetro de la base mide 22π cm.

e) Un cono de 8 cm de altura y cuyo radio de la base mide 4 cm.

f) Una esfera cuya circunferencia máxima tiene un perímetro de 45 mm.

a) $A = 2 \cdot 15 \cdot 18 + 2 \cdot 15 \cdot 22 + 2 \cdot 18 \cdot 22 = 540 + 660 + 792 = 1992 \text{ cm}^2$

b) $A_T = A_L + 2A_B = 5 \cdot 10 \cdot 3 + 2 \cdot \dfrac{50 \cdot 6,88}{2} = 150 + 344 = 494 \text{ cm}^2$

c) La altura de cada cara se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{5^2 - 2,5^2} = 4,33$ dm

$A_T = 4 \cdot \dfrac{5 \cdot 4,33}{2} = 43,3 \text{ dm}^2$

d) Llamando r al radio de la base, se cumple que $2 \cdot \pi \cdot r = 22\pi \Rightarrow r = 11$ cm.

$A_T = A_L + 2A_B = 22\pi \cdot 20 + 2 \cdot \pi \cdot 11^2 = 1382,30 + 760,27 = 2142,57 \text{ cm}^2$

e) La generatriz se calcula aplicando el teorema de Pitágoras: $g = \sqrt{4^2 + 8^2} = 8,94$ cm

$A_T = A_L + A_B = \pi \cdot 4 \cdot 8,94 + \pi \cdot 4^2 = 112,34 + 50,27 = 162,61 \text{ cm}^2$

f) Llamando r al radio de la esfera, se cumple que $2 \cdot \pi \cdot r = 45 \Rightarrow r = 7,16$ mm.

$A = 4 \cdot \pi \cdot 7,16^2 = 644,58 \text{ mm}^2$

32. Halla el volumen de estos cuerpos geométricos.

a) Un ortoedro de dimensiones 22 × 10 × 15 cm.

b) Un prisma regular de 22 m de altura cuya base es un cuadrado de 16 m de lado.

c) Una pirámide recta de 15 dm de altura cuya base es un rectángulo de 60 dm de perímetro y con una dimensión doble de la otra.

d) Un cilindro de 15 cm de radio de la base y altura igual al perímetro de la base.

e) Un cono de 60 dm de radio de la base y 65 dm de generatriz.

f) Una esfera cuya circunferencia máxima tiene un perímetro de 125 mm.

a) $V = 22 \cdot 10 \cdot 15 = 3300 \text{ cm}^3$

b) $V = A_B \cdot h = 16^2 \cdot 22 = 5632 \text{ m}^3$

c) Llamando x y $2x$ a las dimensiones del rectángulo de la base.

$x + x + 2x + 2x = 60 \Rightarrow x = 10 \Rightarrow$ Las dimensiones del rectángulo de la base son 10 x 20 dm.

$V = \dfrac{10 \cdot 20 \cdot 15}{3} = 1000 \text{ dm}^3$

d) $V = A_B \cdot h = \pi \cdot 15^2 \cdot 2 \cdot \pi \cdot 15 = 66\,619,83 \text{ cm}^3$

e) La altura del cono se calcula aplicando el teorema de Pitágoras $h = \sqrt{65^2 - 60^2} = 25$ cm

$V = \dfrac{\pi \cdot 60^2 \cdot 25}{3} = 94\,247,78 \text{ dm}^3$

f) Llamando r al radio de la esfera, se cumple que $2 \cdot \pi \cdot r = 125 \Rightarrow r = 19,89$ mm

$V = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 19,89^3 = 32\,960,44 \text{ mm}^3$

33. Actividad resuelta

34. Dibuja el desarrollo plano de los siguientes cuerpos geométricos y calcula su área total.

a) Un cubo de 5 cm de arista.

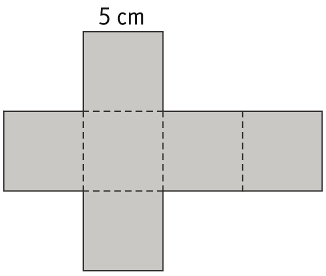
b) Un ortoedro de dimensiones 3 × 3 × 6 cm.

c) Una pirámide regular de 5 cm de arista lateral y cuya base es un triángulo equilátero de 3 cm de lado.

d) Un cilindro de 2 cm de radio de la base y 4 cm de altura.

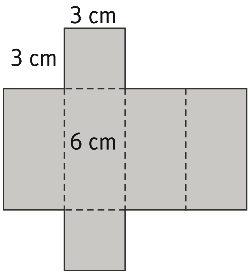
e) El cono obtenido al girar un triángulo rectángulo de catetos 6 cm y 8 cm alrededor del cateto mayor.

a) Cubo**.**



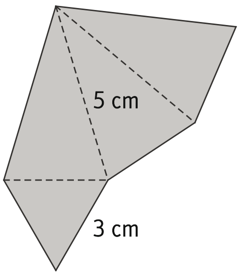
$A = 6 \cdot 5^5 = 150 \text{ cm}^2$

b) Ortoedro.



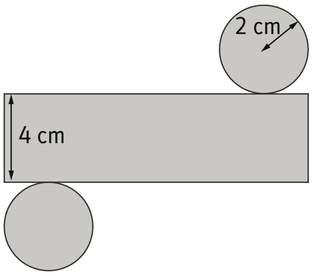
$A = 2 \cdot 3^5 + 4 \cdot 3 \cdot 6 = 90 \text{ cm}^2$

c) Pirámide.



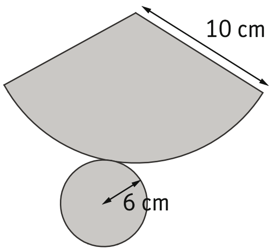
$$A = \frac{3 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}}{2} + 3 \cdot \frac{3 \cdot \frac{\sqrt{91}}{2}}{2} = 25{,}36 \text{ cm}^2$$

d) Cilindro.



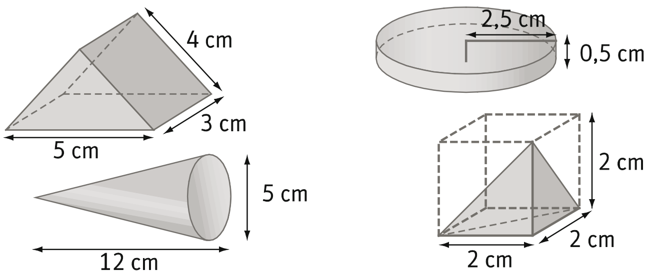
$A = 2\pi \cdot 2^2 + 2\pi \cdot 2 \cdot 4 = 75{,}4 \text{ cm}^2$

e) Cono.

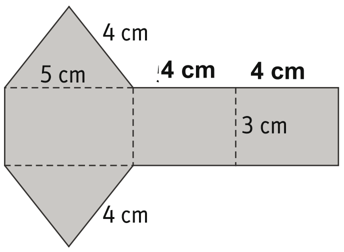


$A = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 301{,}6 \text{ cm}^2$

35. Clasifica los siguientes cuerpos geométricos, dibuja su desarrollo plano y calcula su área total.

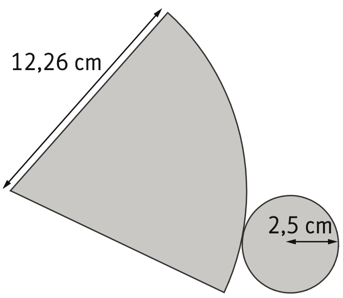


a) Prisma triangular recto.



$A_t = 2 \cdot 4 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot \dfrac{3{,}12 \cdot 5}{2} = 54{,}6 \text{ cm}^2$

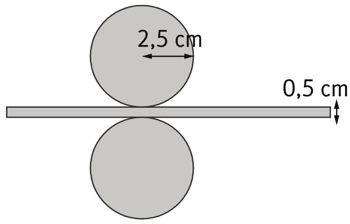
b) Cono recto.



La generatriz mide: $g = \sqrt{12^2 + 2{,}5^2} = 12{,}26 \text{ cm}$

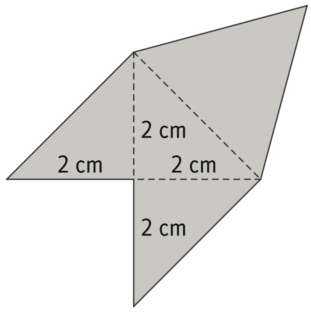
$A_t = \pi \cdot 2{,}5 \cdot 12{,}26 + \pi \cdot 2{,}5^2 = 115{,}92 \text{ cm}^2$

c) Cilindro recto.



$A_t = 2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 2{,}5^2 \cdot \pi = 47{,}12 \text{ cm}^2$

d) Pirámide triangular oblicua.



El triángulo oblicuo es equilátero de lado $2\sqrt{2}$.

La altura de la cara de este triángulo es $\sqrt{6}$.

$A_t = 3 \cdot \dfrac{2 \cdot 2}{2} + \dfrac{2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6}}{2} = 6 + \sqrt{12} = 9{,}46 \text{ cm}^2$

36. ¿Cuál es el volumen limitado por dos esferas concéntricas si sus radios miden 10 cm y 15 cm?

$V = V_{\text{esfera radio } 15} - V_{\text{esfera radio } 10} = \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 15^3 - \dfrac{4}{3} \cdot \pi \cdot 10^3 = 14\,137{,}17 - 4\,188{,}80 = 9948{,}37 \text{ cm}^3$

37. Un cubo tiene 300 cm^2 de área total, calcula el volumen de otro cubo cuya arista mide tres veces la del cubo inicial.

$A_T = 300 = 6a^2 \Rightarrow a = \sqrt{50} = 7{,}07$ cm mide la arista del cubo inicial.

La arista del otro cubo medirá 7,07 · 3 = 21,21 cm.

El volumen del nuevo cubo será $V = 21{,}21^3 = 9541{,}62 \text{ cm}^3$.

38. Actividad resuelta

39. Dada una esfera de 40 cm de radio, halla el área del huso esférico de 40º de amplitud y el volumen de la cuña esférica que determina.

La esfera completa tiene una amplitud de 360º, por lo que un huso de 40º supone $\frac{40}{360}=\frac{1}{9}$ de la esfera.

El área del huso esférico es: $A = \frac{1}{9} A_{\text{esfera}} = \frac{1}{9}\cdot 4\pi\cdot 40^2 = 2234{,}02\text{ cm}^2$.

El volumen de la cuña es: $V = \frac{1}{9} V_{\text{esfera}} = \frac{1}{9}\cdot\frac{4}{3}\cdot\pi\cdot 40^3 = 29\,786{,}95\text{ cm}^3$.

40. El volumen de una cuña esférica de amplitud 90º es 450 m^3. Halla el área y volumen de la esfera correspondiente.

La esfera completa tiene una amplitud de 360º, por lo que una cuña de 90º supone $\frac{90}{360}=\frac{1}{4}$ de la esfera.

El volumen de la esfera es $V_{esfera} = 4\cdot V_{cuña} = 4\cdot 450 = 1800\text{ m}^3$.

Para calcular el área de la esfera calculamos el radio de la esfera: $1800 = \frac{4}{3}\cdot\pi\cdot r^3 \Rightarrow r = 7{,}55$ m.

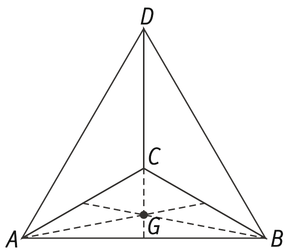
Por tanto, $A = 4\cdot\pi\cdot r^2 = 4\cdot\pi\cdot 7{,}55^2 = 716{,}31\text{ m}^2$.

41. El volumen de un tetraedro regular es de 500 cm^3. Calcula su área total.

Llamamos a la arista del tetraedro *a*.

Aplicando el teorema de Pitágoras, la altura de una cara es $h_{cara}=\sqrt{a^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{a^2}{4}}=\sqrt{\frac{3a^2}{4}}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm .

Para calcular la altura *h* del tetraedro consideramos el triángulo rectángulo *DGB* de la figura.



Aplicando el teorema de Pitágoras: $h=\sqrt{\overline{DB}^2-\overline{GB}^2}=\sqrt{a^2-\overline{GB}^2}$

En un triángulo equilátero el centro del triángulo, el punto *G*, es el punto de intersección de las medianas del triángulo; es decir, el baricentro. La distancia del baricentro a los vértices del triángulo es dos tercios de la longitud de la mediana. Como en un triángulo equilátero, la mediana y la altura coinciden, entonces $\overline{GB}=\frac{2}{3}h_{cara}$

$$h=\sqrt{a^2-\overline{GB}^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}h_{cara}\right)^2}=\sqrt{a^2-\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{a^2-\frac{3a^2}{9}}=\sqrt{\frac{6a^2}{9}}=\sqrt{\frac{2a^2}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}a$$

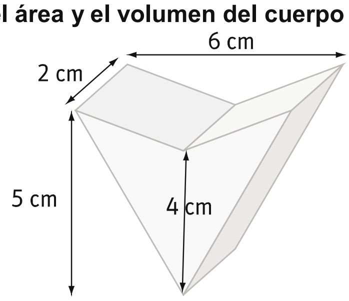
Por tanto, el volumen del tetraedro es:

$$V=\frac{A_b\cdot h}{3}=\frac{\dfrac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}\cdot\sqrt{\frac{2}{3}}a}{3}=\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot a^3}{12\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}a^3}{12}\Rightarrow\frac{\sqrt{2}a^3}{12}=500\Rightarrow a=16{,}19\text{ cm}$$

Entonces,

$$A_T=4\cdot\frac{a\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}=\sqrt{3}a^2=\sqrt{3}\cdot 16{,}19^2=454\text{ cm}^2$$

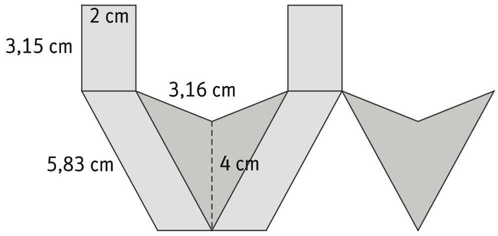
42. Dibuja un desarrollo plano y calcula el área y el volumen del cuerpo geométrico. Clasifícalo.



La figura es un prisma recto cuya base es un trapezoide.

El lado superior del trapezoide mide, aplicando el teorema de Pitágoras, $\sqrt{3^2+1^2}=3{,}16$ cm.

El lado oblicuo del trapezoide mide, aplicando el teorema de Pitágoras, $\sqrt{5^2+3^2}=5{,}83$ cm.

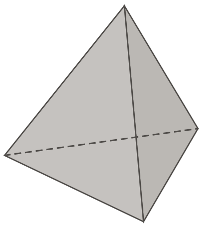


$$A_T = 2 \cdot (2 \cdot 3{,}15) + 2 \cdot (2 \cdot 5{,}83) + 4 \cdot \left(\frac{5\cdot 3}{2} - \frac{1\cdot 3}{2}\right) = 59{,}92 \text{ cm}^2$$

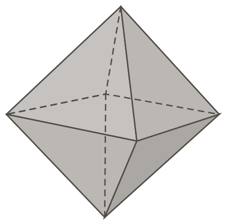
$$V = A_b \cdot h = 2\cdot\left(\frac{5\cdot 3}{2} - \frac{1\cdot 3}{2}\right) \cdot 2 = 12 \cdot 2 = 24 \text{ cm}^3$$

43. Indica, si existe, un centro, un eje y un plano de simetría.

a) De un tetraedro regular.



b) De un octaedro regular.



a) Centro de simetría: no tiene.

Eje de simetría: tiene siete ejes de simetría, cuatro son rectas perpendiculares a cada cara por el vértice opuesto del tetraedro y tres son rectas que pasan por el punto medio de una arista y por el de la arista opuesta.

Plano de simetría: tiene 6 planos de simetría, los formados por cada arista y el punto medio de la arista opuesta.

b) Centro de simetría: tiene un centro de simetría.

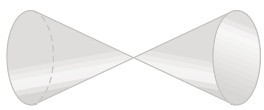
Eje de simetría: tiene trece ejes de simetría, tres que son rectas que unen vértices opuestos, seis que son rectas que unen los centros de aristas opuestas y cuatro que son rectas que unen los baricentros de las caras opuestas.

Plano de simetría: en total el octaedro tiene nueve planos de simetría.

– De las 12 aristas del octaedro, cada cuatro de ellas están contenidas en un mismo plano. Este plano es un plano de simetría. Hay tres planos de este tipo.

– Cada plano perpendicular a uno de los planos formados por dos aristas paralelas es un plano de simetría. Hay seis planos de este tipo.

44. Señala, si existen, un centro, un eje y un plano de simetría de cada uno de los siguientes cuerpos.



a) Un centro de simetría es el punto donde se unen los dos conos, un eje de simetría es la recta que pasa por los centros de los círculos de las bases de los conos y, un plano de simetría, es el plano que contiene al eje de simetría y al centro de simetría.

b) Un centro de simetría es el centro de la figura, un eje de simetría es una recta que pasa por los centros de las bases del cilindro y, un plano de simetría, es cualquier plano que contenga al eje del cilindro.

45. Indica las coordenadas geográficas de:

a) El punto donde se corta el meridiano de Greenwich con el ecuador.

b) El punto donde se corta el ecuador con el antimeridiano de Greenwich.

c) Los polos.

a) Las coordenadas son 0º 0º porque es el origen de sistema de referencia.

b) 0º 180º E o 0º 180º O.

c) 90º N o 90º S. No se indica este u oeste porque todos los meridianos se cortan en los polos.

46. ¿Cómo se llama el paralelo terrestre de mayor longitud? ¿Cuánto mide si se toma como radio de la Tierra 6371 km?

El paralelo terrestre de mayor longitud es el Ecuador.

Su longitud es: $L = 2 \cdot \pi \cdot 6371 = 40\ 030{,}17$ km.

47. Dos puntos del meridiano en el que se encuentra Nueva York tienen latitudes 40º N y 85º N. ¿Cuál es su distancia? (Radio de la Tierra: 6371 km)

Hay que calcular la longitud de un arco de 85º – 40º = 45 º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 45 = 5003{,}77 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 5003,77 km.

48. Dos puntos del meridiano de Greenwich tienen latitudes 40º S y 30º N. ¿Cuál es su distancia?

Hay que calcular la longitud de un arco de 30º – (–40º) = 70º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 70 = 7783{,}64 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 7783,64 km.

49. Dos puntos del ecuador tienen longitudes 40º O y 50º O. ¿Cuál es su distancia?

Hay que calcular la longitud de un arco de 50º – 40º = 10 º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 10 = 1111{,}95 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 1111,95 km.

50. Dos puntos del ecuador tienen longitudes 30º O y 50º E. ¿Cuál es su distancia?

Hay que calcular la longitud de un arco de 50º – (–30º) = 80 º de circunferencia máxima de la Tierra.

$$L = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6371}{360} \cdot 80 = 8895{,}59 \text{ km}$$

La distancia que separa los dos puntos de la esfera terrestre es 8895,59 km.

51. Si el área de la Tierra mide 6371 km, ¿cuál es el área de cada uno de sus 24 husos horarios? ¿Y el volumen de las correspondientes cuñas esféricas?

El área de la Tierra es $A = 4 \cdot \pi \cdot 6371^2 = 510\ 064\ 471{,}9$ km^2.

Por tanto, el área de cada huso horario es 510 064 471,9 : 24 = 21 252 686,33 km^2.

El volumen de la Tierra es $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 6371^3 = 1\,083\ 206\ 917\ 000$ km^3

Por tanto, el volumen de cada cuña es 1 083 206 917 000 : 24 = 45 133 621 540 km^3.

52. Calcula el radio de los paralelos terrestres pertenecientes a planos que distan del centro de la Tierra:

a) 1000 km

b) La mitad del radio terrestre

a) $r = \sqrt{6371^2 - 1000^2} = 6292{,}02$ km

b) $r = \sqrt{6371^2 - \left(\dfrac{6371}{2}\right)^2} = 5517{,}45$ km

53. Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas justificando la respuesta.

a) Si una recta *r* es perpendicular a dos rectas *s* y *t* contenidas en un plano π, entonces *r* es perpendicular al plano π.

b) Si un plano π contiene una recta *r* perpendicular al otro plano π', entonces los planos π y π' son perpendiculares.

c) Dos rectas perpendiculares pueden ser paralelas a un mismo plano.

d) Cuatro puntos definen un plano.

e) Tres puntos siempre definen un plano.

a) Falso. La recta *r* podría pertenecer al plano π y ser perpendicular a *s* y *t*. Por tanto, la recta sería perpendicular a las rectas pero no al plano por pertenecer a él.

b) Verdadero. Todos los planos que contienen a la recta *r* serían perpendiculares a π'.

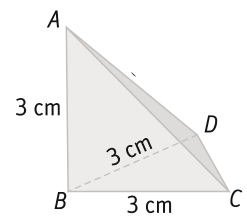
c) Verdadero. Si se cortan forman un plano y entonces hay infinitos planos paralelos a este y, por tanto, a las dos rectas. Si se cruzan, existen dos planos paralelos que los contienen y, entonces, existen infinitos planos paralelos a estos dos.

d) Falso. Los cuatro vértices de un tetraedro no determinan un plano.

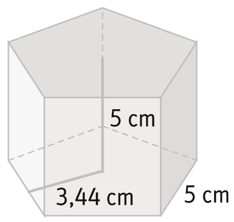
e) Falso. Si los tres puntos están alineados no definen un plano, solo una recta.

54. Para cada una de las siguientes figuras, dibuja su desarrollo plano y calcula su área y su volumen.

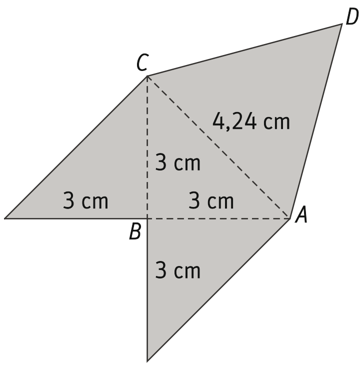
a)



b)



a) Pirámide inscrita en un cubo de arista 3.



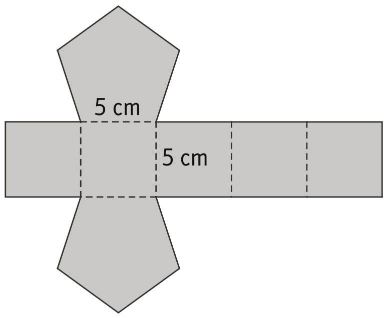
El triángulo *ACD* es equilátero de lado $3\sqrt{2}$.

La altura de la cara de este triángulo es $\dfrac{3\sqrt{6}}{2}$.

$A_t = 3 \cdot \dfrac{3 \cdot 3}{2} + \dfrac{3\sqrt{2} \cdot \dfrac{3\sqrt{6}}{2}}{2} = 21{,}29 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{\dfrac{3 \cdot 3}{2} \cdot 3}{3} = 4{,}5 \text{ cm}^3$

b) Prisma pentagonal.



$A_B = \dfrac{5 \cdot 5 \cdot 3{,}44}{2} = 43 \text{ cm}^2$

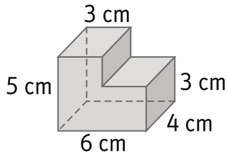
$A_L = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125 \text{ cm}^2$

$A_T = 43 \cdot 2 + 125 = 211 \text{ cm}^2$

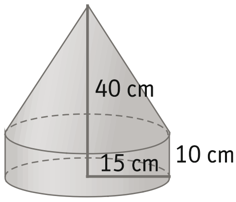
$V = A_B \cdot h = 43 \cdot 5 = 215 \text{ cm}^3$

55. Calcula el volumen de las siguientes figuras.

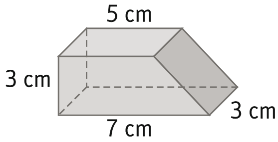
a)



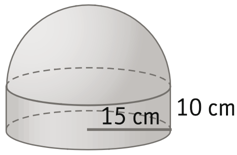
b)



c)



d)



a) $V = V_{\text{ortoedro grande}} - V_{\text{ortoedro pequeño}} = 5 \cdot 6 \cdot 4 - 2 \cdot 3 \cdot 4 = 120 - 24 = 96 \text{ cm}^3$

b) $V = V_{\text{cono}} + V_{\text{cilindro}} = \dfrac{\pi \cdot 15^2 \cdot 30}{3} + \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 7068{,}58 + 7068{,}58 = 14\,137{,}16 \text{ cm}^3$

c) $V = \dfrac{7+5}{2} \cdot 3 \cdot 3 = 54 \text{ cm}^3$

d) $V = V_{\text{semiesfera}} + V_{\text{cilindro}} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi \cdot 15^3}{2} + \pi \cdot 15^2 \cdot 10 = 7068{,}58 + 7068{,}58 = 14137{,}16 \text{ cm}^3$

56. Actividad resuelta

57. Halla las diagonales de los ortoedros con estas dimensiones.

a) ***a* = 5 cm, *b* = 4 cm, *c* = 10 cm**

b) ***a* = 50 mm, *b* = 45 mm, *c* = 105 mm**

c) ***a* = 9 m, *b* = 12 m, *c* = 36 m**

a) $x = \sqrt{5^2 + 4^2} = 6{,}4 \Rightarrow d = \sqrt{6{,}4^2 + 10^2} = 11{,}87 \text{ cm}$

b) $x = \sqrt{50^2 + 45^2} = 67{,}26 \Rightarrow d = \sqrt{67{,}26^2 + 105^2} = 124{,}69 \text{ mm}$

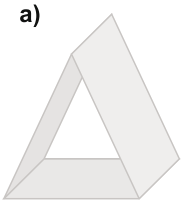
c) $x = \sqrt{9^2 + 12^2} = 15 \Rightarrow d = \sqrt{15^2 + 36^2} = 39 \text{ m}$

58. ¿Qué cuerpo geométrico determinan los centros de las seis caras de un cubo? ¿Y los centros de las cuatro caras de un tetraedro regular?

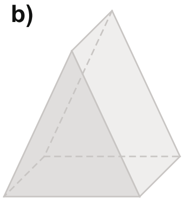
Los centros de las seis caras de un cubo determinan un octaedro regular; y los centros de las cuatro caras de un tetraedro regular forman un tetraedro.

59. Para cada figura, halla *C* + *V* − *A* siendo *C* el número de caras, *V* el de vértices y *A* el de aristas. ¿Qué propiedad cumplen?

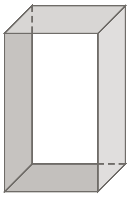
a)



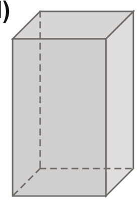
b)



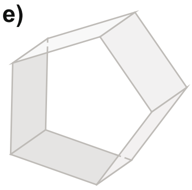
c)



d)



e)



f)

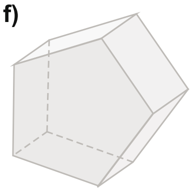
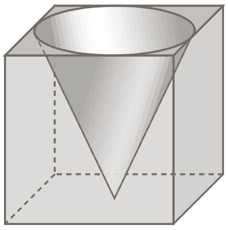


Figura	Caras	Vértices	Aristas	*C* + *V* – *A*
a	3	6	9	0
b	5	6	9	2
c	4	8	12	0
d	6	8	12	2
e	5	10	15	0
f	7	10	15	2

Las figuras que tienen un agujero no cumplen la fórmula de Euler: *C* + *V* – *A* = 2.

60. Para la construcción de ciertas máquinas industriales se necesitan piezas macizas como esta.



Estas piezas están limitadas por un cubo de 2,5 cm de arista y un hueco con forma de cono inscrito en el mismo. ¿Qué volumen tiene la pieza? Con 1 dm^3 de material para fundir, ¿cuántas piezas como máximo se pueden construir?

$$V = V_{cubo} - V_{cono} = 2{,}5^3 - \frac{\pi \cdot 1{,}25^2 \cdot 2{,}5}{3} = 15{,}63 - 4{,}09 = 11{,}54 \text{ cm}^3 = 0{,}01154 \text{ dm}^3$$

Como 1 : 0,01154 = 86,65, entonces con 1 dm^3 de material para fundir se podrán construir 86 piezas como máximo.

61. Para construir una caja sin tapa se corta un cuadrado de 5 cm de lado en cada una de las esquinas de una cartulina de dimensiones 50 cm × 30 cm. ¿Cuál es el volumen de la caja?

Las medidas de la caja serán 40 × 20 × 5 cm.

Por tanto, el volumen de la caja será $V = 40 \cdot 20 \cdot 5 = 4000$ cm^3.

62. Muchas veces se almacenan gases en depósitos esféricos. Una de las razones es que para una misma superficie total, la esfera es el cuerpo geométrico con mayor volumen.

a) Halla la superficie que debe tener un depósito de gas con forma esférica si su volumen es de $\frac{9\pi}{2}$ m^3.

b) ¿Qué dimensiones debería tener un cilindro cuyo diámetro de la base es igual a la altura y con la misma superficie que la esfera anterior? ¿Qué volumen tendría?

a) $V = \frac{9\pi}{2} = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3 \Rightarrow r = \sqrt[3]{3{,}375} = 1{,}5$ m

Por tanto, la superficie será $A = 4\pi \cdot 1{,}5^2 = 28{,}27$ m^2.

b) Llamando x al radio del cilindro:

$28{,}27 = 2 \cdot \pi \cdot x \cdot 2x \Rightarrow 2{,}25 = x^2 \Rightarrow x = 1{,}5$ m

La altura del cilindro sería 3 m y el radio de la base 1,5 m.

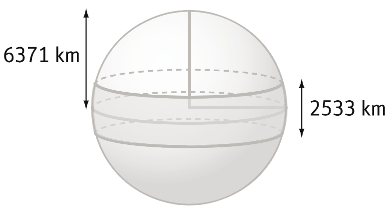
$V = \pi \cdot 1{,}5^2 \cdot 3 = 21{,}21$ m^3 $\Rightarrow 21 < V < 22$

63. Un cilindro de 110 cm de radio de la base y de 250 cm de altura forma parte de una escultura para decorar una plaza. Se debe pintar con una pintura que cuesta 13 € cada litro. Halla el precio que se ha de pagar sabiendo que con un litro se pueden pintar 3 m^2.

La superficie que hay que pintar mide $A_T = 2A_B + A_L = 2 \cdot \pi \cdot 1{,}1^2 + 2 \cdot \pi \cdot 1{,}1 \cdot 2{,}5 = 7{,}6 + 17{,}28 = 24{,}88$ m^2.

Se necesitarán 24,88 : 3 = 8,30 L de pintura, que costarán 8,3 · 13 = 107,9 €.

64. Observa este esquema de la Tierra y determina qué superficie tiene la zona tropical.



$$A_{\text{zona tropical}} = 2 \cdot A_{\text{zona esférica}} = 2 \cdot 2\pi\ 6371 \cdot \frac{2533}{2} = 101\,396\,429{,}7 \text{ km}^2$$

65. Antiguamente, se definía la unidad del metro como la diezmillonésima parte del cuadrante del meridiano terrestre. Comprueba si esta definición es ajustada sabiendo que el radio terrestre es 6371 km.

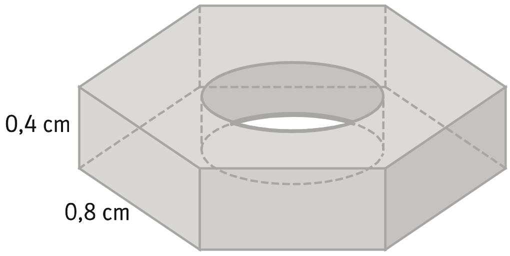
El cuadrante del meridiano terrestre medirá $\frac{2\pi \cdot 6371}{4} = 10\,007{,}54$ km=10 007 540 m.

Por tanto, su diezmillonésima parte medirá $\frac{10\,007\,540}{10\,000\,000} = 1{,}000\,754$ m.

La estimación es bastante ajustada.

66. Actividad resuelta

67. La tuerca de la figura está limitada por un prisma hexagonal regular y un cilindro de 0,5 cm de radio de la base.



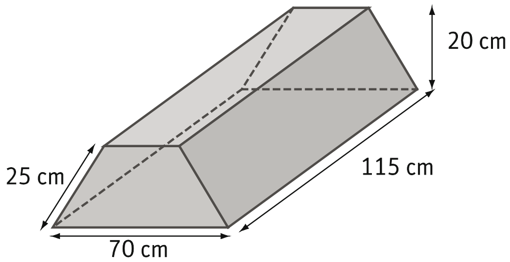
Calcula la masa de metal necesaria para construirla si dicho metal tiene una densidad de 8 g/cm^3.

Calculamos el volumen total de la pieza:

$V_T = V_{\text{prisma}} - V_{\text{cilindro}} = \frac{6 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}69}{2} \cdot 0{,}4 - \pi \cdot 0{,}5^2 \cdot 0{,}4 = 0{,}67 - 0{,}31 = 0{,}36 \text{ cm}^3$

Masa = densidad · volumen = 8 · 0,36 = 2,88 g

68. La viga de la figura está elaborada con un metal de 9 g/cm^3 de densidad.



Calcula la masa total de la viga.

Llamamos x a la base menor del trapecio: $\Rightarrow$ $x = 70 - 2 \cdot \sqrt{25^2 - 20^2} = 70 - 2 \cdot 15 = 40$ cm

$V_T = \frac{70 + 40}{2} \cdot 20 \cdot 115 = 126\,500 \text{ cm}^3$

Masa = densidad · volumen = 9 · 126 500 = 1 138 500 g = 1138,5 kg

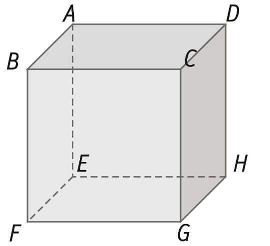
69. Desde un punto exterior a una recta, ¿cuántas rectas perpendiculares se pueden trazar?

***A.* 0** **B. 1** **C. Infinitas** **D. Ninguna de las anteriores**

Únicamente se puede trazar una recta.

La respuesta correcta es la B.

70. Si el cubo de la figura tiene 2 cm de arista, el camino más corto para ir del vértice *D* al *F*, siempre por la superficie del cubo, mide:



A. $2\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B.** $2\sqrt{5}$ **C.** $\sqrt{2}$ **D.** $\sqrt{3}$

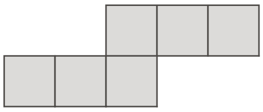
Consideramos el triángulo rectángulo *DGF*, que se forma al hacer el desarrollo plano del cubo. La distancia más corta para ir del vértice *D* al *F* coincide con la hipotenusa del triángulo rectángulo *DGF*.

$$\overline{DF} = \sqrt{\overline{FG}^2 + \overline{DG}^2} = \sqrt{2^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

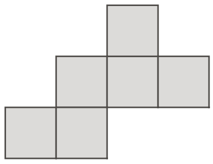
La respuesta correcta es la B.

71. ¿Cuántas de las siguientes figuras pueden ser los desarrollos de un cubo?

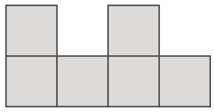
a)



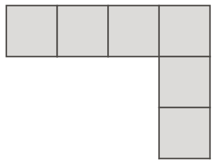
b)



c)



d)



A. 0 **B. 3** **C. 1** **D. 4** **E. 2**

Las únicas figuras que pueden ser el desarrollo de un cubo son la primera y la segunda.

La respuesta correcta es la E.

72. Encuentra el error

Dos puntos *A* y *B* de la esfera terrestre están situados en un mismo paralelo y sus longitudes respectivas son de 170° *E* y 90° *E*. Calcula la distancia que los separa utilizando los siguientes datos:

- **Radio de la Tierra *R* = 6371 km**
- **Radio del paralelo *r* = 4955 km**
- $\widehat{AOB} = 60º$

Posibles soluciones:

A. Se puede medir la distancia que separa *A* de *B* sobre el arco que determinan estos dos puntos en el paralelo en el que están ambos. La distancia será:

$$D = \frac{\pi \cdot 4955 \cdot 80º}{180º} = 6918{,}49 \text{ km}$$

B. Se puede medir la distancia que separa A de B sobre el arco de la circunferencia máxima que determinan estos dos puntos. La distancia será:

$$D = \frac{\pi \cdot 6371 \cdot 80º}{180º} = 6667{,}7 \text{ km}$$

Se obtienen resultados parecidos pero no iguales. ¿Cuál es el correcto? ¿Dónde se ha cometido algún error?

La respuesta correcta es la B.

El error es tomar la distancia entre dos puntos por un paralelo que no sea circunferencia máxima, ya que las distancias más cortas se miden siempre sobre circunferencias máximas.

PONTE A PRUEBA

Cortando cubos

Actividad resuelta

El peso de la Tierra

Pedro ha leído en Internet que la masa de la Tierra es de aproximadamente $6 \cdot 10^{21}$ kg, pero la página en la que ha conseguido la información comete un grave error, ya que la masa que proporciona está en kilogramos cuando en realidad es en toneladas.

Por otra parte, ha obtenido el dato correcto de la densidad media del planeta, que es $5,5 \cdot 10^{12}$ kg por cada kilómetro cúbico de volumen (kg/km^3).

1. Recordando que masa = densidad x volumen, calcula el volumen de la Tierra tanto con el dato erróneo como con el dato correcto. ¿En qué porcentaje varía?

Dato erróneo: $\text{volumen}=\dfrac{\text{masa}}{\text{densidad}}=\dfrac{6\cdot 10^{21}\ \text{kg}}{5,5\cdot 10^{12}\ \text{kg/km}^3}=1,09\cdot 10^{9}\ \text{km}^3$

Dato correcto: $\text{volumen}=\dfrac{\text{masa}}{\text{densidad}}=\dfrac{6\cdot 10^{21}\ \text{t}}{5,5\cdot 10^{12}\ \text{kg/km}^3}=\dfrac{6\cdot 10^{21}\ \cdot 10^{3}\ \text{kg}}{5,5\cdot 10^{12}\ \text{kg/km}^3}=\dfrac{6\cdot 10^{24}\ \text{kg}}{5,5\cdot 10^{12}\ \text{kg/km}^3}=1,09\cdot 10^{12}\ \text{km}^3$

Como $\dfrac{1,09\cdot 10^{9}}{1,09\cdot 10^{12}}=0,001$, entonces el volumen de la tierra con el dato erróneo disminuye un 99,9% con respecto al dato correcto.

2. Calcula el radio de la Tierra tanto con el dato erróneo como con el dato correcto. ¿En qué porcentaje varía?

Dato erróneo: $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3 \Rightarrow 1,09\cdot 10^{9}=\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3 \Rightarrow r=638,43\ \text{km}$

Dato correcto: $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3 \Rightarrow 1,09\cdot 10^{12}=\dfrac{4}{3}\pi\cdot r^3 \Rightarrow r=6384,3\ \text{km}$

Como $\dfrac{638,43}{6384,3}=0,1$, entonces el radio de la tierra con el dato erróneo disminuye un 90% con respecto al dato correcto.

3. Calcula la superficie de la Tierra tanto con el dato erróneo como con el dato correcto. ¿En qué porcentaje varía?

Dato erróneo: $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 638,43^2 = 5\,121\,963$ km^2

Dato correcto: $A = 4\pi \cdot r^2 = 4\pi \cdot 6384,3^2 = 512\,196\,300$ km^2

Como $\dfrac{5\,121\,963}{512\,196\,300}=0,01$, entonces la superficie de la tierra con el dato erróneo disminuye un 99% con respecto al dato correcto.

El depósito de agua

Un depósito de agua tiene forma de ortoedro de dimensiones: 3 m de largo, 2 m de ancho y 4 m de altura. Para llenarlo, se utilizan tres surtidores de agua con los siguientes caudales:

Surtidor	Litros
Surtidor *A*	20 L por minuto
Surtidor *B*	1200 L por hora
Surtidor *C*	1 L por segundo

1. ¿Qué altura alcanza el nivel del agua si el depósito está vacío y comienzan a verter agua los tres surtidores a la vez durante una hora y media?

$20 \cdot 90 + 1200 \cdot 1{,}5 + 1 \cdot 5400 = 1800 + 1800 + 5400 = 9000$ L verterán al depósito los tres surtidores en una hora y media.

Llamando x a la altura alcanzada en el depósito al verter los 9000 L: $9 = x \cdot 3 \cdot 2 \Rightarrow x = 1{,}5$ m.

Se alcanzará una altura de 1,5 m.

2. ¿Cuánto tiempo deben permanecer abiertos los tres surtidores a la vez para que estando vacío el depósito se consiga llenar justo a la mitad de su capacidad?

El depósito tiene una capacidad de $3 \cdot 4 \cdot 2 = 24\text{ m}^3 = 24\,000$ L de agua.

Llamando x a las horas que deben permanecer abiertos los tres surtidores para llenar la mitad de la capacidad del depósito:

$20 \cdot 60x + 1200 \cdot x + 1 \cdot 3600x = 12\,000 \Rightarrow 1200x + 1200x + 3600x = 12\,000 \Rightarrow 6000x = 12\,000 \Rightarrow x = 2$

El grifo deberá permanecer abierto 2 horas.

3. Si el depósito está vacío y comienzan a verter agua los tres surtidores, pero a la media hora el surtidor *C* se para, ¿qué tiempo se tardará en llenar el depósito desde que estaba vacío?

En media hora verterán, entre los tres surtidores, $20 \cdot 30 + 0{,}5 \cdot 1200 + 1800 \cdot 1 = 3000$ L de agua.

Por tanto, quedará por verter $24\,000 - 3000 = 21\,000$ L entre los surtidores *A* y *B*.

Llamando x a las horas que deben permanecer abiertos los surtidores A y B para verter 21 000 L:

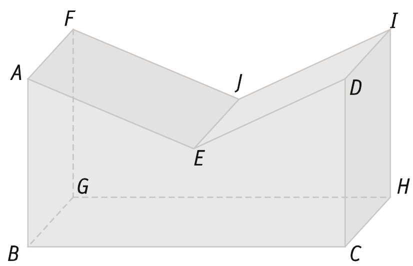
$20 \cdot 60x + 1200x = 21\,000 \Rightarrow 2400x = 21\,000 \Rightarrow x = 8{,}75$ horas.

En total, se necesitarán $8{,}75 + 0{,}5 = 9{,}25$ horas; es decir, 9 horas y 15 minutos.

AUTOEVALUACIÓN

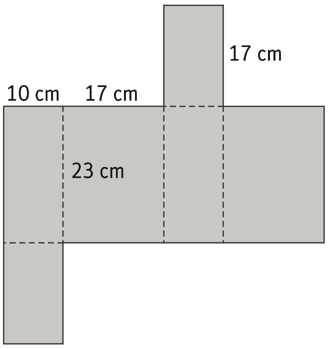
1. En el siguiente cuerpo geométrico, señala:

a) Dos caras paralelas.
b) Dos caras perpendiculares.
c) Dos caras secantes no perpendiculares y la arista donde se cortan.
d) Dos aristas paralelas.
e) Dos aristas perpendiculares secantes y el punto donde se cortan.
f) Dos aristas perpendiculares sin ningún punto en común.
g) Dos aristas que no sean paralelas ni perpendiculares.



a) *ABGF* y *DCHI* son dos caras paralelas.
b) *ABGF* y *BCHG* son dos caras perpendiculares.
c) *AEJF* y *EDIJ* son dos caras secantes no perpendiculares que se cortan en la arista EJ.
d) *BC* y *GH* son dos aristas paralelas.
e) *AB* y *BC* son dos aristas perpendiculares secantes que se cortan en el punto B.
f) *AB* y *GH* son dos aristas perpendiculares porque el plano que contiene a la arista *AB*, *ABGF*, es perpendicular a la arista *GH*. Además, no tienen ningún punto en común.
g) *AB* y *AE* son dos aristas que no son paralelas ni perpendiculares.

2. Calcula el área y el volumen de un ortoedro de dimensiones 10 cm x 17 cm x 23 cm. Dibuja su desarrollo plano indicando sus medidas.



$A_T = 2 \cdot (10 \cdot 17 + 17 \cdot 23 + 10 \cdot 23) = 2 \cdot 791 = 1582 \text{ cm}^2$

$V = 10 \cdot 17 \cdot 23 = 3910 \text{ cm}^3$

3. La diagonal de un cubo mide $\sqrt{48}$ cm. Calcula el área total, el volumen y la diagonal de una de sus caras.

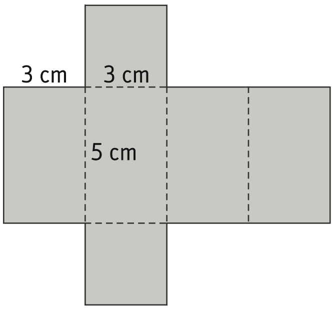
Llamando *a* a la arista del cubo, la diagonal *d´* de una de sus caras medirá: $d' = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2a^2} = \sqrt{2}a$

La diagonal *d* del cubo medirá: $d = \sqrt{a^2 + (d')^2} = \sqrt{a^2 + \left(\sqrt{2}a\right)^2} = \sqrt{a^2 + 2a^2} = \sqrt{3a^2} = \sqrt{3}a$

Por tanto, la arista del cubo medirá: $\sqrt{48} = \sqrt{3}a \Rightarrow a = \dfrac{\sqrt{48}}{\sqrt{3}} = \sqrt{16} = 4$

El área y el volumen son: $A_T = 6a^2 = 6 \cdot 4^2 = 96 \text{ cm}^2$ y $V = a^3 = 4^3 = 64 \text{ cm}^3$

4. Dibuja el desarrollo de un prisma regular de 78 cm² de área sabiendo que su base es un cuadrado de 3 cm de lado. Calcula su volumen.



Llamando *x* a la altura del prisma:

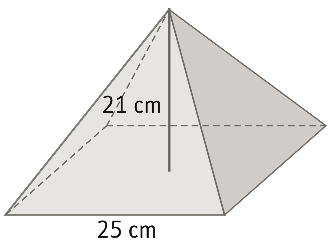
$A_T = 2 \cdot 3^2 + 4 \cdot x \cdot 3 = 78 \Rightarrow 18 + 12x = 78 \Rightarrow 12x = 60 \Rightarrow x = 5$

La altura del prisma es 5 cm.

$V = Ab \cdot h = 3^2 \cdot 5 = 45 \text{ cm}^2$

Su desarrollo plano es el siguiente:

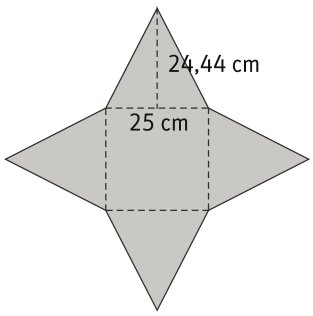
5. Calcula el área lateral, el área total y el volumen de esta pirámide recta de base cuadrada. Dibuja su desarrollo plano.



Aplicando el teorema de Pitágoras, calculamos la apotema de la pirámide:

$a_p = \sqrt{21^2 + 12{,}5^2} = 24{,}44$ cm

Su desarrollo plano es el siguiente:



$A_L = 4 \cdot \dfrac{25 \cdot 24{,}44}{2} = 1222 \text{ cm}^2 \Rightarrow A_T = A_L + A_B = 1222 + 25^2 = 1847 \text{ cm}^2$

$V = \dfrac{A_B \cdot h}{3} = \dfrac{25^2 \cdot 21}{3} = 4375 \text{ cm}^3$

6. Un cono tiene una generatriz de 10 cm y un área lateral de 60 π cm^2. Calcula su área total y su volumen.

Llamando *r* al radio de la base del cono:

$A_L = 60\pi = \pi \cdot r \cdot 10 \Rightarrow 60 = r \cdot 10 \Rightarrow r = 6$ cm.

$A_T = A_B + A_L = \pi \cdot 6^2 + \pi \cdot 6 \cdot 10 = 36\pi + 60\pi = 96\pi = 301{,}59$ cm^2

Aplicamos el teorema de Pitágoras para calcular la altura *h* del cono: $h = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8$ cm

$$V = \frac{A_B \cdot h}{3} = \frac{36\pi \cdot 8}{3} = 301{,}59 \text{ cm}^3$$

7. El área de una semiesfera es de 50 π cm^2. Calcula el radio y el volumen de la esfera completa.

Llamando *r* al radio de la esfera:

$$A_{\text{semiesfera}} = 50\pi = \frac{4 \cdot \pi \cdot r^2}{2} \Rightarrow 50 = 2r^2 \Rightarrow 25 = r^2 \Rightarrow r = 5 \text{ cm}$$

El radio de la esfera es 5 cm.

Por tanto, el volumen de la esfera completa es $V = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot 5^3 = 523{,}60$ cm^3.

8. Indica, si existen, un centro de simetría, un eje de simetría y un plano de simetría de un dodecaedro regular.

Centro de simetría: Tiene un centro de simetría.

Ejes de simetría: Tiene 31 ejes de simetría. Seis que son rectas que unen los centros de caras opuestas, 15 que son rectas que unen los centros de aristas opuestas y diez que son rectas que unen cada par de vértices opuestos.

Planos de simetría: Tiene 15 planos de simetría, que contienen a cada pareja de aristas opuestas coplanares.

9. La localidad de Pola de Siero (Asturias) tiene unas coordenadas geográficas de 43º 24´ N y 5º 39´O y la de Jarandilla de la Vega (Cáceres) de 40º 8´N y 5º 39´O. Calcula la distancia que los separa.

Las dos ciudades tienen la misma longitud y la diferencia de latitudes, determina un ángulo de:

43º 24´ – .40º 8´ = 3º 16´ = 3,27º

La distancia mínima entre las dos ciudades se mide sobre la circunferencia máxima correspondiente al meridiano de esas dos ciudades y, por tanto, se corresponde con la longitud de arco de amplitud 3,27º en una circunferencia de radio 6371 km:

$$L = \frac{\pi \cdot 6371 \cdot 3{,}27}{180} = 363{,}61 \text{ km}$$

La distancia entre Pola de Siero y Jarandilla de la Vega es, aproximadamente, 363,61 km.