

NÚMEROS REALES

Página 27

REFLEXIONA Y RESUELVE

El paso de \mathbb{Z} a \mathbb{Q}

■ Di cuáles de las siguientes ecuaciones se pueden resolver en \mathbb{Z} y para cuáles es necesario el conjunto de los números racionales, \mathbb{Q} .

a) $-5x = 60$

b) $-7x = 22$

c) $2x + 1 = 15$

d) $6x - 2 = 10$

e) $-3x - 3 = 1$

f) $-x + 7 = 6$

Se pueden resolver en \mathbb{Z} a), c), d) y f).

Hay que recurrir a \mathbb{Q} para resolver b) y e).

El paso de \mathbb{Q} a \mathbb{R}

■ Resuelve, ahora, las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 - 9 = 0$

b) $5x^2 - 15 = 0$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0$

d) $2x^2 - 5x + 1 = 0$

e) $7x^2 - 7x = 0$

f) $2x^2 + 3x = 0$

a) $x^2 - 9 = 0 \rightarrow x = \pm 3$

b) $5x^2 - 15 = 0 \rightarrow x^2 = 3 \rightarrow x = \pm\sqrt{3}$

c) $x^2 - 3x - 4 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} 4 \\ -1 \end{cases}$

d) $2x^2 - 5x + 1 = 0 \rightarrow x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{17}}{4} = \begin{cases} \frac{5 + \sqrt{17}}{4} \\ \frac{5 - \sqrt{17}}{4} \end{cases}$

e) $7x^2 - 7x = 0 \rightarrow x^2 - x = 0 \rightarrow x = 0, x = 1$

f) $2x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(2x + 3) = 0 \rightarrow x = 0, x = -\frac{3}{2}$

Números irracionales

- **Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional. Para ello, supón que no lo es: $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. Eleva al cuadrado y llega a una contradicción.**

Supongamos que $\sqrt{2}$ no es irracional. Entonces, se podría poner en forma de fracción:

$$\sqrt{2} = \frac{p}{q} \rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2} \rightarrow p^2 = 2q^2$$

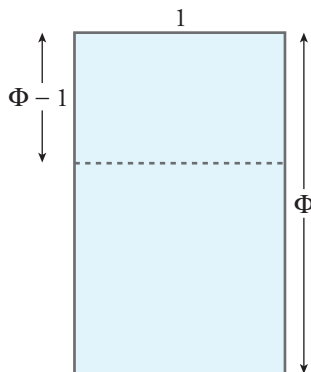
En p^2 , el factor 2 está un número par de veces (es decir, en la descomposición de factores primos de p^2 , el exponente de 2 es par). Lo mismo ocurre con q^2 . Por tanto, en $2q^2$ el exponente de 2 es un número impar. De ser así, no se podría cumplir la igualdad.

Suponiendo que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ llegamos a una contradicción:

$$"p^2 = 2q^2, \text{ pero } p^2 \text{ no puede ser igual a } 2q^2".$$

Por tanto, $\sqrt{2}$ no puede ponerse en forma de fracción. No es racional.

- **Obtén el valor de Φ teniendo en cuenta que un rectángulo de dimensiones $\Phi : 1$ es semejante al rectángulo que resulta de suprimirle un cuadrado.**



$$\frac{\Phi}{1} = \frac{1}{\Phi - 1} \rightarrow \Phi(\Phi - 1) = 1 \rightarrow \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

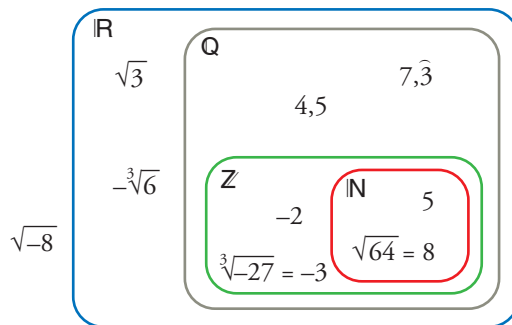
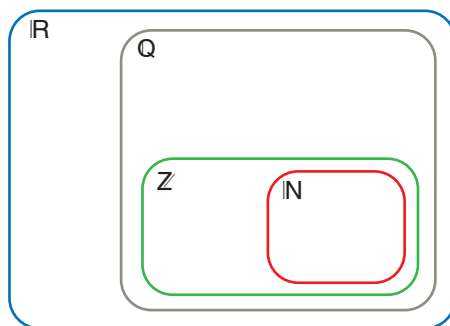
$$\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4}}{2} = \begin{cases} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \\ \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \text{ (negativo)} \end{cases}$$

Como Φ ha de ser positivo, la única solución válida es $\Phi = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$.

Página 28

1. Sitúa los siguientes números en el diagrama:

$$\sqrt{3}; 5; -2; 4,5; 7,\overline{3}; -\sqrt[3]{6}; \sqrt{64}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt{-8}$$



2. Sitúa los números del ejercicio anterior en los siguientes casilleros. Cada número puede estar en más de una casilla.

NATURALES, \mathbb{N}	
ENTEROS, \mathbb{Z}	
RACIONALES, \mathbb{Q}	
REALES, \mathbb{R}	
NO REALES	

Añade un número más (de tu cosecha) en cada casilla.

NATURALES, \mathbb{N}	$5; \sqrt{64}$
ENTEROS, \mathbb{Z}	$5; -2; \sqrt{64}; \sqrt[3]{-27}$
RACIONALES, \mathbb{Q}	$5; -2; 4,5; 7,\overline{3}; \sqrt[3]{-27}; \sqrt{64}$
REALES, \mathbb{R}	$\sqrt{3}; 5; -2; 4,5; 7,\overline{3}; -\sqrt[3]{6}; \sqrt{64}; \sqrt[3]{-27}$
NO REALES	$\sqrt{-8}$

Página 29

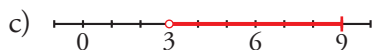
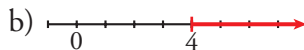
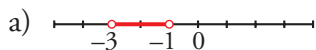
3. Representa los siguientes conjuntos:

a) $(-3, -1)$

b) $[4, +\infty)$

c) $(3, 9]$

d) $(-\infty, 0)$



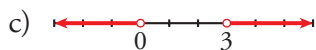
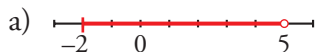
4. Representa los siguientes conjuntos:

a) $\{x / -2 \leq x < 5\}$

b) $[-2, 5) \cup (5, 7]$

c) $(-\infty, 0) \cup (3, +\infty)$

d) $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$



Página 30

1. Halla los siguientes valores absolutos:

a) $|-11|$

b) $|\pi|$

c) $|-\sqrt{5}|$

d) $|0|$

e) $|3 - \pi|$

f) $|3 - \sqrt{2}|$

g) $|1 - \sqrt{2}|$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}|$

i) $|7 - \sqrt{50}|$

a) 11

b) π

c) $\sqrt{5}$

d) 0

e) $|3 - \pi| = \pi - 3$

f) $|3 - \sqrt{2}| = 3 - \sqrt{2}$

g) $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$

h) $|\sqrt{2} - \sqrt{3}| = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

i) $|7 - \sqrt{50}| = \sqrt{50} - 7$

2. Averigua para qué valores de x se cumplen las siguientes relaciones:

a) $|x| = 5$

b) $|x| \leq 5$

c) $|x - 4| = 2$

d) $|x - 4| \leq 2$

e) $|x - 4| > 2$

f) $|x + 4| > 5$

a) 5 y -5

b) $-5 \leq x \leq 5$; $[-5, 5]$

c) 6 y 2

d) $2 \leq x \leq 6$; $[2, 6]$

e) $x < 2$ o $x > 6$; $(-\infty, 2) \cup (6, +\infty)$

f) $x < -9$ o $x > 1$; $(-\infty, -9) \cup (1, +\infty)$

Página 31

1. Simplifica:

a) $\sqrt[12]{x^9}$

b) $\sqrt[12]{x^8}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}}$

d) $\sqrt[6]{8}$

e) $\sqrt[3]{64}$

f) $\sqrt[8]{81}$

a) $\sqrt[12]{x^9} = \sqrt[4]{x^3}$

b) $\sqrt[12]{x^8} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[5]{y^{10}} = y^2$

d) $\sqrt[6]{8} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt{2}$

e) $\sqrt[3]{64} = \sqrt[3]{2^6} = \sqrt[3]{2^2} = \sqrt[3]{4}$

f) $\sqrt[8]{81} = \sqrt[8]{3^4} = \sqrt{3}$

2. ¿Cuál es mayor, $\sqrt[4]{31}$ o $\sqrt[3]{13}$?

Reducimos a índice común:

$$\sqrt[4]{31} = \sqrt[12]{29\,791}; \quad \sqrt[3]{13} = \sqrt[12]{28\,561}$$

Por tanto, es mayor $\sqrt[4]{31}$.

3. Reduce a índice común:

a) $\sqrt[12]{a^5}$ y $\sqrt[18]{a^7}$

b) $\sqrt[3]{51}$ y $\sqrt[2]{132\,650}$

a) $\sqrt[12]{a^5} = \sqrt[36]{a^{15}}; \quad \sqrt[18]{a^7} = \sqrt[36]{a^{14}}$

b) $\sqrt[3]{51} = \sqrt[6]{132\,651}; \quad \sqrt[2]{132\,650}$

4. Simplifica:

a) $(\sqrt{\sqrt{k}})^8$

b) $\sqrt[5]{\sqrt[3]{x^{10}}}$

c) $\sqrt[3]{(\sqrt{x})^6}$

a) $(\sqrt[8]{k})^8 = k$

b) $\sqrt[15]{x^{10}} = \sqrt[3]{x^2}$

c) $\sqrt[6]{x^6} = x$

Página 32

5. Reduce:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[6]{3}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[8]{2}$

d) $\sqrt[4]{8} \cdot \sqrt[3]{4}$

a) $\sqrt[15]{2^5} \cdot \sqrt[15]{2^3} = \sqrt[15]{2^8}$

b) $\sqrt[6]{3^4} \cdot \sqrt[6]{3} = \sqrt[6]{3^5}$

c) $\sqrt[8]{2^4} \cdot \sqrt[8]{2^2} \cdot \sqrt[8]{2} = \sqrt[8]{2^7}$

d) $\sqrt[12]{8^3} \cdot \sqrt[12]{4^4} = \sqrt[12]{(2^3)^3 \cdot (2^2)^4} = \sqrt[12]{2^{17}} = 2\sqrt[12]{2^5}$

6. Simplifica:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{a \cdot b}}{\sqrt[3]{a \cdot b}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt[6]{a^3}}{\sqrt[3]{a^2}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt[4]{a^3 \cdot b^5 \cdot c}}{\sqrt{a \cdot b^3 \cdot c^3}}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{x^3}{x^5}} = \sqrt{\frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^{-2}}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{a^3 b^3}{a^2 b^2}} = \sqrt[6]{a b}$$

$$\text{c) } \sqrt[6]{\frac{a^3}{a^4}} = \sqrt[6]{\frac{1}{a}} = \sqrt[6]{a^{-1}}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{\frac{a^3 b^5 c}{a^2 b^6 c^6}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b c^5}} = \frac{1}{c} \sqrt[4]{\frac{a}{b c}}$$

7. Reduce:

$$\text{a) } \frac{\sqrt[3]{3^2}}{\sqrt{3}} \quad \text{b) } \frac{\sqrt{9}}{\sqrt[3]{3}} \quad \text{c) } \frac{\sqrt[5]{16}}{\sqrt{2}} \quad \text{d) } \frac{\sqrt[4]{729}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{a) } \sqrt{\frac{3^4}{3^3}} = \sqrt{3}$$

$$\text{b) } \sqrt[6]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[6]{3^4} = \sqrt[3]{3^2}$$

$$\text{c) } \sqrt[10]{\frac{2^8}{2^5}} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$$

$$\text{d) } \sqrt[4]{\frac{3^6}{3^2}} = \sqrt[4]{3^4} = 3$$

8. Suma y simplifica:

$$\text{a) } 5\sqrt{x} + 3\sqrt{x} + 2\sqrt{x}$$

$$\text{b) } \sqrt{9 \cdot 2} + \sqrt{25 \cdot 2} - \sqrt{2}$$

$$\text{c) } \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8}$$

$$\text{d) } \sqrt{27} - \sqrt{50} + \sqrt{12} + \sqrt{8}$$

$$\text{e) } \sqrt{50a} - \sqrt{18a}$$

$$\text{a) } 10\sqrt{x}$$

$$\text{b) } 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} = 7\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{2} - \sqrt{8} &= \sqrt{2 \cdot 3^2} + \sqrt{2 \cdot 5^2} - \sqrt{2} - \sqrt{2^3} = \\ &= 3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} - \sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\text{d) } \sqrt{3^3} - \sqrt{2 \cdot 5^2} + \sqrt{2^2 \cdot 3} + \sqrt{2^3} = 3\sqrt{3} - 5\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2} = 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$$

$$\text{e) } \sqrt{2 \cdot 5^2 \cdot a} - \sqrt{2 \cdot 3^2 \cdot a} = 5\sqrt{2a} - 3\sqrt{2a} = 2\sqrt{2a}$$

Página 33

9. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{5}{\sqrt{7}}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}}$

a) $\frac{5}{\sqrt{7}} = \frac{5\sqrt{7}}{7}$

b) $\frac{3}{\sqrt[3]{4}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$

c) $\sqrt{\frac{7}{3}} = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{21}}{3}$

d) $\frac{1}{\sqrt{a^3}} = \frac{1}{a\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a}}{a^2}$

e) $\frac{3}{\sqrt{50}} = \frac{3}{\sqrt{2 \cdot 5^2}} = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$

f) $\frac{4}{\sqrt{18}} = \frac{4}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{4}{3\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

g) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{5}}{5}$

h) $\frac{1}{\sqrt[3]{40}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^3 \cdot 5}} = \frac{1}{2\sqrt[3]{5}} = \frac{\sqrt[3]{5^2}}{10} = \frac{\sqrt[3]{25}}{10}$

i) $\frac{3}{\sqrt[3]{36}} = \frac{3}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 3^2}} = \frac{3\sqrt[3]{2 \cdot 3}}{2 \cdot 3} = \frac{3\sqrt[3]{6}}{6} = \frac{\sqrt[3]{6}}{2}$

j) $\frac{2}{\sqrt[3]{100}} = \frac{2}{\sqrt[3]{2^2 \cdot 5^2}} = \frac{2\sqrt[3]{2 \cdot 5}}{2 \cdot 5} = \frac{2\sqrt[3]{10}}{10} = \frac{\sqrt[3]{10}}{5}$

10. Racionaliza denominadores y simplifica cuando puedas:

a) $\frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

b) $\frac{x + y}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

c) $\frac{a - 1}{\sqrt{a} - 1}$

d) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y}}{\sqrt{x} - \sqrt{y}}$

e) $\frac{1}{2\sqrt{3} - \sqrt{5}}$

f) $\frac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3}}{3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}}$

g) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} + \frac{1}{\sqrt{2} + 1}$

h) $\frac{1}{\sqrt{x} - \sqrt{y}} + \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}}$

a) $\frac{\sqrt{2} - 1}{(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)} = \frac{\sqrt{2} - 1}{2 - 1} = \sqrt{2} - 1$

b) $\frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{(x + y)(\sqrt{x} - \sqrt{y})}{x - y} = \frac{x\sqrt{x} - x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - y\sqrt{y}}{x - y}$

c) $\frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(\sqrt{a} - 1)(\sqrt{a} + 1)} = \frac{(a - 1)(\sqrt{a} + 1)}{(a - 1)} = \sqrt{a} + 1$

d) $\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})}{(\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} - \sqrt{y})} = \frac{x + y + 2\sqrt{xy}}{x - y}$

e) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{(2\sqrt{3} - \sqrt{5})(2\sqrt{3} + \sqrt{5})} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{12 - 5} = \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{5}}{7}$

f) $\frac{(3\sqrt{2} + 2\sqrt{3})^2}{18 - 12} = \frac{18 + 12 + 12\sqrt{6}}{6} = \frac{30 + 12\sqrt{6}}{6} = 5 + 2\sqrt{6}$

g) $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2} + 1}{1} + \frac{\sqrt{2} - 1}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2} + 2\sqrt{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$

h) $\frac{\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{x} - \sqrt{y}}{x - y} = \frac{2\sqrt{x}}{x - y}$

Página 36

1. Halla:

a) $\log_2 16$

b) $\log_2 0,25$

c) $\log_9 1$

d) $\log_{10} 0,1$

e) $\log_4 64$

f) $\log_7 49$

g) $\ln e^4$

h) $\ln e^{-1/4}$

i) $\log_5 0,04$

j) $\log_6 \left(\frac{1}{216} \right)$

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4 & \text{b) } \log_2 0,25 = \log_2 2^{-2} = -2 \\ \text{c) } \log_9 1 = 0 & \text{d) } \log_{10} 0,1 = \log_{10} 10^{-1} = -1 \\ \text{e) } \log_4 64 = \log_4 4^3 = 3 & \text{f) } \log_7 49 = \log_7 7^2 = 2 \\ \text{g) } \ln e^4 = 4 & \text{h) } \ln e^{-1/4} = -\frac{1}{4} \\ \text{i) } \log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2 & \text{j) } \log_6 \left(\frac{1}{216} \right) = \log_6 6^{-3} = -3 \end{array}$$

2. Halla la parte entera de:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \log_2 60 & \text{b) } \log_5 700 & \text{c) } \log_{10} 43\,000 \\ \text{d) } \log_{10} 0,084 & \text{e) } \log_9 60 & \text{f) } \ln e \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{a) } 2^5 = 32 ; 2^6 = 64 ; 32 < 60 < 64 \\ 5 < \log_2 60 < 6 \rightarrow \log_2 60 = 5, \dots \\ \text{b) } 5^4 = 625 ; 5^5 = 3125 ; 625 < 700 < 3125 \\ 4 < \log_5 700 < 5 \rightarrow \log_5 700 = 4, \dots \\ \text{c) } 10^4 = 10\,000 ; 10^5 = 100\,000 ; 10\,000 < 43\,000 < 100\,000 \\ 4 < \log_{10} 43\,000 < 5 \rightarrow \log_{10} 43\,000 = 4, \dots \\ \text{d) } 10^{-2} = 0,01 ; 10^{-1} = 0,1 ; 0,01 < 0,084 < 0,1 \\ -2 < \log_{10} 0,084 < -1 \rightarrow \log_{10} 0,084 = -1, \dots \\ \text{e) } 9^1 = 9 ; 9^2 = 81 ; 9 < 60 < 81 \\ 1 < \log_9 60 < 2 \rightarrow \log_9 60 = 1, \dots \\ \text{f) } \ln e = 1 \end{array}$$

3. Aplica la propiedad ⑧ para obtener los siguientes logaritmos con la ayuda de la calculadora:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \log_2 1\,500 & \text{b) } \log_5 200 \\ \text{c) } \log_{100} 200 & \text{d) } \log_{100} 40 \end{array}$$

En cada caso, comprueba el resultado utilizando la potenciación.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\log 1\,500}{\log 2} = 10,55; 2^{10,55} \approx 1\,500 & \text{b) } \frac{\log 200}{\log 5} = 3,29; 5^{3,29} \approx 200 \\ \text{c) } \frac{\log 200}{\log 100} = 1,15; 100^{1,15} \approx 200 & \text{d) } \frac{\log 40}{\log 100} = 0,80; 100^{0,80} \approx 40 \end{array}$$

4. Sabiendo que $\log_5 A = 1,8$ y $\log_5 B = 2,4$, calcula:

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}}$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2}$

a) $\log_5 \sqrt[3]{\frac{A^2}{25B}} = \frac{1}{3} [2 \log_5 A - \log_5 25 - \log_5 B] = \frac{1}{3} [2 \cdot 1,8 - 2 - 2,4] = \frac{-0,8}{3} \approx -0,27$

b) $\log_5 \frac{5\sqrt{A^3}}{B^2} = \log_5 5 + \frac{3}{2} \log_5 A - 2 \log_5 B = 1 + \frac{3}{2} \cdot 1,8 - 2 \cdot 2,4 = 1 + 2,7 - 4,8 = -1,1$

5. Averigua la relación que hay entre x e y , sabiendo que se verifica:

$$\ln y = 2x - \ln 5$$

$$\ln y = 2x - \ln 5 \rightarrow \ln y = \ln e^{2x} - \ln 5$$

$$\ln y = \ln \frac{e^{2x}}{5} \rightarrow y = \frac{e^{2x}}{5}$$

Página 38

1. Di una cota del error absoluto y otra del error relativo en las siguientes mediciones:

a) La superficie de esta casa es de $96,4 \text{ m}^2$.

b) Por la gripe se han perdido 37 millones de horas de trabajo.

c) Juana gana 19 000 € al año.

a) $|\text{Error absoluto}| < 0,05 \text{ m}^2$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,05}{96,4} < 0,00052 = 0,052\%$$

b) $|\text{Error absoluto}| < 0,5 \text{ millones de horas} = 500\,000 \text{ horas}$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{0,5}{37} < 0,014 = 1,4\%$$

c) — Si suponemos que los tres ceros finales se han utilizado para poder expresar la cantidad (es decir, que se trata de 19 mil €, redondeando a los “miles de euros”), entonces:

$$|\text{E.A.}| < 0,5 \text{ miles de } \text{€} = 500 \text{ €} \quad |\text{E.R.}| < \frac{0,5}{19} < 0,027 = 2,7\%$$

— Si suponemos que es 19 000 € exactamente:

$$|\text{E.A.}| < 0,5 \text{ €} \quad |\text{E.R.}| < \frac{0,5}{19\,000} < 0,000027 = 0,0027\%$$

Página 39

2. Calcula en notación científica sin usar la calculadora:

a) $(800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12}$

b) $0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7}$

$$\begin{aligned} \text{a) } (800\,000 : 0,0002) \cdot 0,5 \cdot 10^{12} &= ((8 \cdot 10^5) : (2 \cdot 10^{-4})) \cdot 5 \cdot 10^{11} = \\ &= (4 \cdot 10^9) \cdot 5 \cdot 10^{11} = 20 \cdot 10^{20} = 2 \cdot 10^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } 0,486 \cdot 10^{-5} + 93 \cdot 10^{-9} - 6 \cdot 10^{-7} &= 48,6 \cdot 10^{-7} + 0,93 \cdot 10^{-7} - 6 \cdot 10^{-7} = \\ &= 43,53 \cdot 10^{-7} = 4,353 \cdot 10^{-6} \end{aligned}$$

3. Opera con la calculadora:

a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6})$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9}$

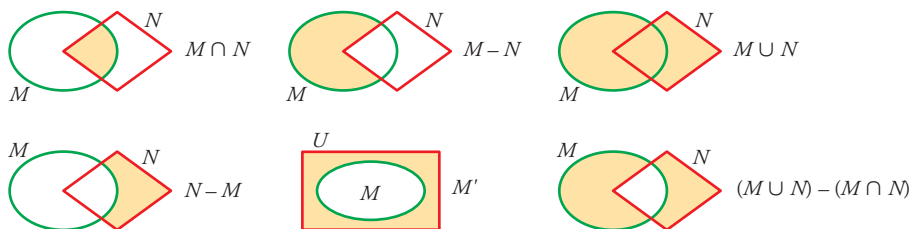
a) $(3,87 \cdot 10^{15} \cdot 5,96 \cdot 10^{-9}) : (3,941 \cdot 10^{-6}) \approx 5,85 \cdot 10^{12}$

b) $8,93 \cdot 10^{-10} + 7,64 \cdot 10^{-10} - 1,42 \cdot 10^{-9} = 2,37 \cdot 10^{-10}$

Página 41

LENGUAJE MATEMÁTICO

1. Da nombre al conjunto sombreado en cada caso:



2. Expresa simbólicamente estas relaciones:

a) 13 es un número natural.

b) -4 es un número entero.

c) $0,43$ es un número racional.

- d) π es un número real.
- e) Todos los enteros son racionales.
- f) El intervalo $[3, 4]$ está formado por números reales.

- a) $13 \in \mathbb{N}$
- b) $-4 \in \mathbb{Z}$
- c) $0,43 \in \mathbb{Q}$
- d) $\pi \in \mathbb{R}$
- e) $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$
- f) $[3, 4] \subset \mathbb{R}$

3. Designa simbólicamente estos conjuntos:

- a) Los números enteros mayores que -5 y menores que 7 (utiliza \mathbb{Z} y el intervalo abierto $(-5, 7)$).
- b) Los números irracionales (utiliza \mathbb{R} y \mathbb{Q}).
- c) Los números racionales mayores que 2 y menores o iguales que 3 .
- d) Los números que son múltiplos de 2 o de 3 (el conjunto de los múltiplos de p se designa \dot{p}).

- a) $\{x \in \mathbb{Z} / x \in (-5, 7)\}$
- b) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$
- c) $\{x \in \mathbb{Q} / 2 < x \leq 3\}$
- d) $\{x / x = \dot{2} \text{ o } x = \dot{3}\}$

4. Traduce:

- a) $\{x \in \mathbb{Z} / x \geq -4\}$
- b) $\{x \in \mathbb{N} / x > 5\}$
- c) $\{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 9\}$
- d) $\{x \in \mathbb{Z} / -2 \leq x < 7\}$

- a) Números enteros mayores o iguales que -4 .
- b) Números naturales mayores que 5 .
- c) Números naturales mayores que 1 y menores o iguales que 9 .
- d) Números enteros mayores o iguales que -2 y menores que 7 .

5. ¿Cuáles son los números que forman el conjunto $(\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \cap [0, 1]$?

Todos los irracionales comprendidos en el intervalo $(0, 1)$.

Página 43

EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

PARA PRACTICAR

Números racionales e irracionales

- 1 Clasifica los siguientes números indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} y \mathbb{R} pertenecen:

$$2; \sqrt{3}; 0,\widehat{6}; 127; -\frac{5}{7}; \pi; \sqrt{\frac{16}{9}}; -13; \frac{43}{13}$$

\mathbb{N} : 2; 127

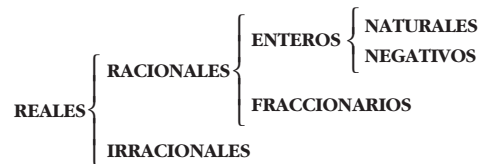
\mathbb{Z} : 2; 127; -13

\mathbb{Q} : 2; $0,\widehat{6}$; 127; $-\frac{5}{7}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}$; -13; $\frac{43}{13}$

\mathbb{R} : Todos

- 2 Escribe tres ejemplos de cada uno de los tipos de números que aparecen en este esquema:

NÚMEROS:



Reales: -3; $\sqrt{2}$; $\frac{13}{7}$

Racionales: -3; $\frac{13}{7}$; $1,0\widehat{7}$

Irracionales: $\sqrt{2}$; $-\sqrt{5}$; $\frac{\pi}{2}$

Enteros: -3; 5; 128

Fraccionarios: $\frac{3}{5}$; $-\frac{1}{3}$; $1,\widehat{48}$

Naturales: 128; 8; 15

Negativos: -3; -7; -132

- 3 Busca tres números racionales y uno irracional comprendidos entre $\frac{4}{7}$ y $\frac{5}{7}$.

$$\frac{4}{7} = \frac{20}{35}$$

$$\frac{5}{7} = \frac{25}{35}$$

Racionales: $\frac{21}{35}$, $\frac{22}{35}$, $\frac{23}{35}$

Irracional: $\frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,7071\dots$

4 Indica cuál, de cada par de números, es mayor:

a) $\frac{140}{99}$ y $\sqrt{2}$

b) $0,52\widehat{6}$ y $0,5\widehat{26}$

c) $4,8\widehat{9}$ y $2\sqrt{6}$

d) $-2,098$ y $-2,1$

a) $\sqrt{2}$

b) $0,52\widehat{6}$

c) $4,8\widehat{9}$

d) $-2,098$

5 Indica si cada uno de los siguientes números es racional o irracional:

$$-547; \sqrt{8}; \frac{13}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \sqrt{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{5}{17}; 0,3\widehat{42}$$

Racionales: $-547; \frac{13}{3}; \sqrt{4}; \frac{5}{17}; 0,3\widehat{42}$

Irracionales: $\sqrt{8}; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\pi}{2}$

6 Aproxima, por redondeo a las centésimas, los siguientes números:

$$\frac{11}{7}; \frac{2}{3}; \frac{\sqrt{3}}{2}; 2\pi; e; \Phi$$

$$\frac{11}{7} \approx 1,57$$

$$\frac{2}{3} \approx 0,67$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,87$$

$$2\pi \approx 6,28$$

$$e \approx 2,72$$

$$\Phi \approx 1,62$$

Potencias

7 Halla sin calculadora: $\left(\frac{3}{2} - \frac{3}{4}\right)^{-2} \left(\frac{1}{3} - \frac{7}{9}\right)^{-1} + 4$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} \cdot \left(-\frac{4}{9}\right)^{-1} + 4 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right) + 4 = -4 + 4 = 0$$

8 Simplifica, utilizando las propiedades de las potencias:

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{9^3 \cdot 4^3 \cdot 5}$

b) $\frac{3^4 \cdot 16 \cdot 9^{-1}}{5^{-1} \cdot 3^5}$

c) $\frac{15^2 \cdot 8^{-1}}{6^3 \cdot 10^2}$

d) $\frac{a^{-3} b^{-4} c^7}{a^{-5} b^2 c^{-1}}$

• Mira el problema resuelto número 2.

a) $\frac{3^6 \cdot 2^5 \cdot 5^2}{3^6 \cdot 2^6 \cdot 5} = \frac{5}{2}$

b) $\frac{3^4 \cdot 2^4 \cdot 3^{-2}}{5^{-1} \cdot 3^5} = \frac{2^4 \cdot 5}{3^3} = \frac{80}{27}$

c) $\frac{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^{-3}}{2^3 \cdot 3^3 \cdot 2^2 \cdot 5^2} = \frac{1}{2^8 \cdot 3} = \frac{1}{768}$

d) $\frac{c^7 a^5 c}{a^3 b^4 b^2} = \frac{a^2 c^8}{b^6}$

9 Expresa los siguientes radicales mediante potencias de exponente fraccionario y simplifica:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt[5]{a^2} \cdot \sqrt{a} & \text{b) } \frac{\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} & \text{c) } \frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \\ \text{a) } a^{2/5} \cdot a^{1/2} = a^{9/10} = \sqrt[10]{a^9} & \text{b) } \frac{x^{2/3}}{x^{1/2}} = x^{1/6} = \sqrt[6]{x} & \text{c) } a^{-3/4} = \sqrt[4]{a^{-3}} \end{array}$$

10 Resuelve, sin utilizar la calculadora:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \sqrt[5]{32} & \text{b) } \sqrt[3]{343} & \text{c) } \sqrt[4]{625} \\ \text{d) } \sqrt{0,25} & \text{e) } \sqrt[3]{8^4} & \text{f) } \sqrt[3]{0,001} \\ \text{a) } \sqrt[5]{2^5} = 2 & \text{b) } \sqrt[3]{7^3} = 7 & \text{c) } \sqrt[4]{5^4} = 5 \\ \text{d) } \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} = 0,5 & \text{e) } \sqrt[3]{2^{12}} = 2^4 = 16 & \text{f) } \sqrt[3]{0,1^3} = 0,1 \end{array}$$

11 Expresa como una potencia de base 2:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } \frac{1}{\sqrt{2}} & \text{b) } (-32)^{1/5} & \text{c) } (\sqrt[8]{2})^4 \\ \text{a) } 2^{-1/2} & \text{b) } (-2^5)^{1/5} = -2 & \text{c) } 2^{4/8} = 2^{1/2} \end{array}$$

12 Calcula utilizando potencias de base 2, 3 y 5:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)^3 & \text{b) } \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{9}\right)^{-1} \cdot \frac{1}{8} \\ \text{c) } \frac{(-5)^3 (-8)^3 (-9)^2}{15^2 \cdot 20^4} & \text{d) } \frac{(-30)^{-1} \cdot 15^2}{10^3} \\ \text{a) } 2^2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{(-3)^3}{2^3} = \frac{-9}{2} = \frac{-9}{2} & \text{b) } \frac{1}{2^4} \cdot \frac{3^2}{2} \cdot \frac{1}{2^3} = \frac{3^2}{2^8} = \frac{9}{256} \\ \text{c) } \frac{(-5)^3 \cdot (-2^3)^3 \cdot (-3^2)^2}{3^2 \cdot 5^2 \cdot (2^2 \cdot 5)^4} = \frac{5^3 \cdot 2^9 \cdot 3^4}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 2^8 \cdot 5^4} = \frac{2 \cdot 3^2}{5^3} = \frac{18}{125} \\ \text{d) } \frac{3^2 \cdot 5^2}{-2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2^3 \cdot 5^3} = -\frac{3}{5^2 \cdot 2^4} = \frac{-3}{400} \end{array}$$

13 Expresa en forma de potencia, efectúa las operaciones y simplifica:

$$\begin{array}{ll} \text{a) } \frac{\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}}{a\sqrt{a}} & \text{b) } 16^{1/4} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{\sqrt[6]{4}} \\ \text{a) } \frac{a^{3/4} \cdot a^{-1}}{a \cdot a^{1/2}} = a^{-7/4} = \frac{1}{\sqrt[4]{a^7}} & \\ \text{b) } (2^4)^{1/4} \cdot (2^2)^{-1/3} \cdot (2^2)^{-1/6} = 2 \cdot 2^{-2/3} \cdot 2^{-1/3} = 2^0 = 1 & \end{array}$$

14 Justifica las igualdades que son verdaderas. Escribe el resultado correcto en las falsas:

a) $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = 1$

b) $(3^{-2})^{-3} \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 1$

c) $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{8}{15}$

d) $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = \frac{80}{9}$

a) Falsa. $\frac{a^2 \cdot b^{-2}}{a^{-2} \cdot b^2} = \frac{a^4}{b^4}$

b) Verdadera. $(3^{-2})^{-3} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^2 = 3^6 \cdot \left(\frac{1}{3^3}\right)^2 = 3^6 \cdot \frac{1}{3^6} = \frac{3^6}{3^6} = 1$

c) Verdadera. $\frac{3^{-2} - 5^{-2}}{3^{-1} - 5^{-1}} = \frac{(1/3^2) - (1/5^2)}{1/3 - 1/5} = \frac{(1/3 - 1/5)(1/3 + 1/5)}{(1/3 - 1/5)} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$

d) Verdadera. $\left(\frac{1}{3}\right)^{-2} - (-3)^{-2} = 3^2 - \frac{1}{(-3)^2} = 3^2 - \frac{1}{3^2} = 9 - \frac{1}{9} = \frac{81 - 1}{9} = \frac{80}{9}$

15 Demuestra, utilizando potencias, que:

a) $(0,125)^{1/3} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = 2$

a) $(0,125)^{1/3} = \left(\frac{125}{1000}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{8}\right)^{1/3} = \left(\frac{1}{2^3}\right)^{1/3} = \frac{1}{2} = 2^{-1}$

b) $(0,25)^{-1/2} = \left(\frac{25}{100}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1/2} = \left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1/2} = (2^2)^{1/2} = 2$

Radicales

16 Introduce los factores dentro de cada raíz:

a) $2\sqrt[3]{3}$

b) $4\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$

c) $\frac{2}{x}\sqrt[3]{\frac{3x}{8}}$

d) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{\frac{25}{9}}$

e) $2\sqrt[4]{4}$

f) $\frac{1}{5}\sqrt[3]{15}$

a) $\sqrt[3]{3 \cdot 2^3} = \sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[3]{\frac{4^3}{4}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = \sqrt[3]{16}$

c) $\sqrt{\frac{2^2 \cdot 3x}{x^2 \cdot 2^3}} = \sqrt{\frac{3}{2x}}$

d) $\sqrt[3]{\frac{3^3 \cdot 5^2}{5^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5}}$

e) $\sqrt[4]{2^4 \cdot 2^2} = \sqrt[4]{2^6} = \sqrt{2^3} = \sqrt{8}$

f) $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot 5}{5^3}} = \sqrt[3]{\frac{3}{5^2}} = \sqrt[3]{\frac{3}{25}}$

Página 44

17 Sacar de la raíz el factor que puedas:

a) $\sqrt[3]{16}$

b) $4\sqrt{8}$

c) $\sqrt{1000}$

d) $\sqrt[3]{8a^5}$

e) $\sqrt{\frac{125a^2}{16b}}$

f) $\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}}$

g) $\sqrt{\frac{16}{a^3}}$

h) $\sqrt{4a^2 + 4}$

i) $\sqrt{\frac{a}{9} + \frac{a}{16}}$

a) $\sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}$

b) $4\sqrt{2^3} = 4 \cdot 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

c) $\sqrt{2^3 \cdot 5^3} = 10\sqrt{10}$

d) $\sqrt[3]{2^3 \cdot a^5} = 2a\sqrt[3]{a^2}$

e) $\sqrt{\frac{5^3 \cdot a^2}{2^4 \cdot b}} = \frac{5a}{4} \sqrt{\frac{5}{b}}$

f) $\sqrt{\frac{13}{36}} = \frac{1}{6} \sqrt{13}$

g) $\frac{4}{a} \sqrt{\frac{1}{a}}$

h) $\sqrt{4(a^2 + 1)} = 2\sqrt{a^2 + 1}$

i) $\sqrt{\frac{25a}{16 \cdot 9}} = \frac{5\sqrt{a}}{12}$

18 Simplifica:

a) $\sqrt[6]{0,027}$

b) $\sqrt[8]{0,0016}$

c) $\sqrt[4]{1 + \frac{9}{16}}$

a) $\sqrt[6]{\frac{27}{1000}} = \sqrt[6]{\frac{3^3}{10^3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{3}{10}\right)^3} = \left(\frac{3}{10}\right)^{3/6} = \left(\frac{3}{10}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{3}{10}}$

b) $\sqrt[8]{\frac{16}{10000}} = \sqrt[8]{\frac{2^4}{10^4}} = \sqrt[8]{\left(\frac{2}{10}\right)^4} = \left(\frac{1}{5}\right)^{4/8} = \left(\frac{1}{5}\right)^{1/2} = \sqrt{\frac{1}{5}}$

c) $\sqrt[4]{\frac{25}{16}} = \sqrt[4]{\frac{5^2}{4^2}} = \left(\frac{5}{4}\right)^{2/4} = \left(\frac{5}{4}\right)^{1/2} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

19 Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{24}$

b) $\sqrt[6]{27}$

c) $\sqrt[3]{-108}$

d) $\sqrt[12]{64y^3}$

e) $\sqrt[4]{\frac{81}{64}}$

f) $\sqrt[8]{625} : \sqrt[4]{25}$

a) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{3^3} = 3^{3/6} = 3^{1/2} = \sqrt{3}$

c) $-\sqrt[3]{3^3 \cdot 2^2} = -3\sqrt[3]{2^2}$

d) $\sqrt[12]{2^6 \cdot y^3} = \sqrt[4]{2^2 \cdot y} = \sqrt[4]{2^2} \cdot \sqrt[4]{y} = \sqrt{2} \cdot \sqrt[4]{y}$

e) $\sqrt[4]{\frac{3^4}{2^6}} = \frac{3}{\sqrt{2^3}} = \frac{3}{2\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{4}$

f) $\sqrt[8]{5^4} : \sqrt[4]{5^2} = \sqrt{5} : \sqrt{5} = 1$

20 Reduce a índice común y ordena de menor a mayor:

a) $\sqrt[4]{4}, \sqrt[3]{3}, \sqrt{2}$

b) $\sqrt{6}, \sqrt[3]{4}$

c) $\sqrt[4]{6}, \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[4]{72}, \sqrt[3]{9}, \sqrt[6]{100}$

a) $\sqrt[12]{64}, \sqrt[12]{81}, \sqrt[12]{64}; \sqrt[4]{4} = \sqrt{2} < \sqrt[3]{3}$

b) $\sqrt[6]{216}, \sqrt[6]{16}; \sqrt[3]{4} < \sqrt{6}$

c) $\sqrt[20]{7776}, \sqrt[20]{10000}; \sqrt[4]{6} < \sqrt[5]{10}$

d) $\sqrt[12]{373248}, \sqrt[12]{6561}, \sqrt[12]{10000}; \sqrt[3]{9} < \sqrt[6]{100} < \sqrt[4]{72}$

21 Realiza la operación y simplifica, si es posible:

a) $4\sqrt{27} \cdot 5\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{\frac{4}{3}} \cdot \sqrt{\frac{27}{8}}$

c) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{8}}$

d) $(\sqrt[3]{12})^2$

e) $(\sqrt[6]{32})^3$

f) $\sqrt[3]{24} : \sqrt[3]{3}$

a) $20\sqrt{27 \cdot 6} = 20\sqrt{3^3 \cdot 2 \cdot 3} = 20\sqrt{2 \cdot 3^4} = 180\sqrt{2}$

b) $2\sqrt{\frac{4 \cdot 27}{3 \cdot 8}} = 2\sqrt{\frac{9}{2}} = 6\sqrt{\frac{1}{2}}$

c) $\sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$

d) $(\sqrt[3]{2^2 \cdot 3})^2 = \sqrt[3]{2^4 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{2 \cdot 3^2} = 2\sqrt[3]{18}$

e) $(\sqrt[6]{2^5})^3 = \sqrt[6]{2^{15}} = \sqrt{2^5} = 2^2\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$

f) $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} : \sqrt[3]{3} = 2\sqrt[3]{3} : \sqrt[3]{3} = 2$

22 Efectúa y simplifica, si es posible:

a) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{a}} \cdot \sqrt{a}$

c) $\left(\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt{8}}\right)^3$

d) $\sqrt[3]{2\sqrt{3}} : \sqrt{\sqrt[3]{4}}$

• En b) y c) puedes expresar los radicales como potencias de bases a y 2 , respectivamente.

a) $\sqrt[6]{2^2 \cdot 3^3} = \sqrt[6]{108}$

b) $\sqrt[3]{a} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{a}} \cdot \sqrt{a} = \sqrt{a}$

c) $\left(\sqrt[6]{\frac{2^5}{2^9}}\right)^3 = \left(\sqrt[6]{\frac{1}{2^4}}\right)^3 = \sqrt[6]{\frac{1}{2^{12}}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{2 \cdot 3}} : \sqrt{\sqrt[3]{2^2}} = \sqrt[6]{2^2 \cdot 3} : \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{3}$

23 Expresa con una única raíz:

a) $\sqrt[4]{\sqrt[3]{4}}$

b) $\sqrt[3]{2\sqrt[4]{8}}$

c) $(\sqrt[4]{a^3} \cdot \sqrt[5]{a^4}) : \sqrt{a}$

a) $\sqrt[12]{4} = \sqrt[6]{2}$

b) $\sqrt[12]{2^4 \cdot 2^3} = \sqrt[12]{2^7} = \sqrt[12]{128}$

c) $\sqrt[20]{\frac{a^{15} \cdot a^{16}}{a^{10}}} = \sqrt[20]{a^{21}} = a \sqrt[20]{a}$

24 Racionaliza los denominadores y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2}{\sqrt[3]{2}}$

c) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

d) $\frac{3}{3+\sqrt{3}}$

e) $\frac{\sqrt{72} + 3\sqrt{32} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}}$

a) $\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2} \cdot 3^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6}}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $\frac{2\sqrt[3]{2^2}}{2} = \sqrt[3]{4}$

c) $\frac{(\sqrt{2}-1)\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$

d) $\frac{3(3-\sqrt{3})}{9-3} = \frac{9-3\sqrt{3}}{6} = \frac{3(3-\sqrt{3})}{2 \cdot 3} = \frac{3-\sqrt{3}}{2}$

e) $\frac{\sqrt{2^3 \cdot 3^2} + 3\sqrt{2^5} - \sqrt{2^3}}{\sqrt{2^3}} = \frac{3\sqrt{8} + 6\sqrt{8} - \sqrt{8}}{\sqrt{8}} = \frac{8\sqrt{8}}{\sqrt{8}} = 8$

25 Calcula y simplifica:

a) $5\sqrt{125} + 6\sqrt{45} - 7\sqrt{20} + \frac{3}{2}\sqrt{80}$

b) $\sqrt[3]{16} + 2\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{54} - \frac{21}{5}\sqrt[3]{250}$

c) $\sqrt{125} + \sqrt{54} - \sqrt{45} - \sqrt{24}$

d) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})(\sqrt{6} - 1)$

a) $25\sqrt{5} + 18\sqrt{5} - 14\sqrt{5} + 6\sqrt{5} = 35\sqrt{5}$

b) $2\sqrt[3]{2} + 2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2} - 21\sqrt[3]{2} = -20\sqrt[3]{2}$

c) $5\sqrt{5} + 3\sqrt{6} - 3\sqrt{5} - 2\sqrt{6} = 2\sqrt{5} + \sqrt{6}$

d) $\sqrt{12} - \sqrt{2} + \sqrt{18} - \sqrt{3} = 2\sqrt{3} - \sqrt{2} + 3\sqrt{2} - \sqrt{3} = \sqrt{3} + 2\sqrt{2}$

26 Simplifica al máximo las siguientes expresiones:

a) $3\sqrt[3]{16} - 2\sqrt[3]{250} + 5\sqrt[3]{54} - 4\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{18}{125}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{8}{45}}$

c) $7\sqrt[3]{81a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5}$

a) $3\sqrt[3]{2^4} - 2\sqrt[3]{2 \cdot 5^3} + 5\sqrt[3]{2 \cdot 3^3} - 4\sqrt[3]{2} = 6\sqrt[3]{2} - 10\sqrt[3]{2} + 15\sqrt[3]{2} - 4\sqrt[3]{2} = 7\sqrt[3]{2}$

b) $\sqrt{\frac{2}{5}} - 4\sqrt{\frac{2 \cdot 3^2}{5^3}} + \frac{1}{3}\sqrt{\frac{2^3}{3^2 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{2}{5}} - \frac{12}{5}\sqrt{\frac{2}{5}} + \frac{2}{9}\sqrt{\frac{2}{5}} = \frac{-53}{45}\sqrt{\frac{2}{5}}$

c) $7\sqrt[3]{3^4 \cdot a} - 2\sqrt[3]{3a^4} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = 21\sqrt[3]{3a} - 2a\sqrt[3]{3a} + \frac{\sqrt[3]{3a}}{5} = \left(\frac{106}{5} - 2a\right)\sqrt[3]{3a}$

27 Efectúa y simplifica:

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^2 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^2$

b) $(\sqrt{6} + \sqrt{5})2\sqrt{2}$

c) $(\sqrt{5} - \sqrt{6})(\sqrt{5} + \sqrt{6})$

d) $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{2})^2$

e) $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sqrt{3}$

a) $(\sqrt{3} + \sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{2}) \cdot (\sqrt{3} + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{2}) = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} = 4\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{12} + 2\sqrt{10} = 4\sqrt{3} + 2\sqrt{10}$

c) $5 - 6 = -1$

d) $20 + 18 - 12\sqrt{10} = 38 - 12\sqrt{10}$

e) $(2 - 1)\sqrt{3} = \sqrt{3}$

28 Racionaliza y simplifica:

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{18}}$

b) $\frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{12}}$

c) $\frac{1}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})}$

d) $\frac{3}{\sqrt{5} - 2}$

e) $\frac{11}{2\sqrt{5} + 3}$

f) $\frac{3\sqrt{6} + 2\sqrt{2}}{3\sqrt{3} + 2}$

a) $\frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{\sqrt{2 \cdot 3^2}} = \frac{2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3\sqrt{2}} = \frac{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})\sqrt{2}}{3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{6} - 2}{3 \cdot 2} =$
 $= \frac{2(\sqrt{6} - 1)}{3 \cdot 2} = \frac{\sqrt{6} - 1}{3}$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{\sqrt{2^2 \cdot 3}} &= \frac{2\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2\sqrt{3}} = \frac{(2\sqrt{3} + \sqrt{2})\sqrt{3}}{2\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}} = \frac{6 + \sqrt{6}}{6} = 1 + \frac{\sqrt{6}}{6} \\
 \text{c)} \quad \frac{(\sqrt{3} + \sqrt{5})}{2(\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5})} &= \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{2(3 - 5)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{-4} = -\frac{\sqrt{3} + \sqrt{5}}{4} \\
 \text{d)} \quad \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{(\sqrt{5} - 2)(\sqrt{5} + 2)} &= \frac{3(\sqrt{5} + 2)}{5 - 4} = 3(\sqrt{5} + 2) = 3\sqrt{5} + 6 \\
 \text{e)} \quad \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{(2\sqrt{5} + 3)(2\sqrt{5} - 3)} &= \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{20 - 9} = \frac{11(2\sqrt{5} - 3)}{11} = 2\sqrt{5} - 3 \\
 \text{f)} \quad \frac{(3\sqrt{6} + 2\sqrt{2})(3\sqrt{3} - 2)}{(3\sqrt{3} + 2)(3\sqrt{3} - 2)} &= \frac{9\sqrt{18} - 6\sqrt{6} + 6\sqrt{6} - 4\sqrt{2}}{27 - 4} = \frac{9\sqrt{2 \cdot 3^2} - 4\sqrt{2}}{23} = \\
 &= \frac{27\sqrt{2} - 4\sqrt{2}}{23} = \frac{23\sqrt{2}}{23} = \sqrt{2}
 \end{aligned}$$

29 Efectúa y simplifica:

$$\text{a)} \quad \frac{3}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$\text{b)} \quad \frac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{7} + \sqrt{5}} - \frac{\sqrt{7} + \sqrt{5}}{\sqrt{7} - \sqrt{5}}$$

$$\text{a)} \quad \frac{3(\sqrt{3} + \sqrt{2}) - 2(\sqrt{3} - \sqrt{2})}{(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})} = \frac{3\sqrt{3} + 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{2}}{3 - 2} = \sqrt{3} + 5\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b)} \quad \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5})^2 - (\sqrt{7} + \sqrt{5})^2}{(\sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5})} &= \frac{(\sqrt{7} - \sqrt{5} + \sqrt{7} + \sqrt{5})(\sqrt{7} - \sqrt{5} - \sqrt{7} - \sqrt{5})}{7 - 5} = \\
 &= \frac{2\sqrt{7}(-2\sqrt{5})}{2} = -2\sqrt{35}
 \end{aligned}$$

Página 45
Notación científica y errores
30 Efectúa y da el resultado en notación científica con tres cifras significativas. Determina también, en cada caso, una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$\text{a)} \quad \frac{(3,12 \cdot 10^{-5} + 7,03 \cdot 10^{-4}) 8,3 \cdot 10^8}{4,32 \cdot 10^3}$$

$$b) \frac{(12,5 \cdot 10^7 - 8 \cdot 10^9)(3,5 \cdot 10^{-5} + 185)}{9,2 \cdot 10^6}$$

$$c) \frac{5,431 \cdot 10^3 - 6,51 \cdot 10^4 + 385 \cdot 10^2}{8,2 \cdot 10^{-3} - 2 \cdot 10^{-4}}$$

$$a) 1,41 \cdot 10^2 \quad | \text{Error absoluto} | < 0,5; \quad | \text{Error relativo} | < 0,0035$$

$$b) -1,58 \cdot 10^5 \quad | \text{Error absoluto} | < 500; \quad | \text{Error relativo} | < 0,0032$$

$$c) -2,65 \cdot 10^6 \quad | \text{Error absoluto} | < 5\,000; \quad | \text{Error relativo} | < 0,0019$$

31 Ordena de mayor a menor los números de cada apartado. Para ello, pasa a notación científica los que no lo estén:

$$a) 3,27 \cdot 10^{13}; \quad 85,7 \cdot 10^{12}; \quad 453 \cdot 10^{11}$$

$$b) 1,19 \cdot 10^{-9}; \quad 0,05 \cdot 10^{-7}; \quad 2\,000 \cdot 10^{-12}$$

$$a) 8,57 \cdot 10^{13} > 4,53 \cdot 10^{13} > 3,27 \cdot 10^{13}$$

$$b) 5 \cdot 10^{-9} > 2 \cdot 10^{-9} > 1,19 \cdot 10^{-9}$$

32 Efectúa: $\frac{2 \cdot 10^{-7} - 3 \cdot 10^{-5}}{4 \cdot 10^6 + 10^5}$

$$-7,268 \cdot 10^{-12}$$

33 Expresa en notación científica y calcula: $\frac{60\,000^3 \cdot 0,00002^4}{100^2 \cdot 72\,000\,000 \cdot 0,0002^5}$

$$\frac{(6 \cdot 10^4)^3 \cdot (2 \cdot 10^{-5})^4}{10^4 \cdot 7,2 \cdot 10^7 \cdot (2 \cdot 10^{-4})^5} = 150$$

34 Considera los números: $A = 3,2 \cdot 10^7$; $B = 5,28 \cdot 10^4$ y $C = 2,01 \cdot 10^5$

Calcula $\frac{B+C}{A}$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$0,00793125 = 7,93 \cdot 10^{-3}$$

$$| \text{Error absoluto} | < 5 \cdot 10^{-6}; \quad | \text{Error relativo} | < 6,31 \cdot 10^{-4}$$

35 Si $A = 3,24 \cdot 10^6$; $B = 5,1 \cdot 10^{-5}$; $C = 3,8 \cdot 10^{11}$ y $D = 6,2 \cdot 10^{-6}$, calcula

$\left(\frac{A}{B} + C\right) \cdot D$. Expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo cometidos.

$$2\,749\,882,353 \approx 2,75 \cdot 10^6$$

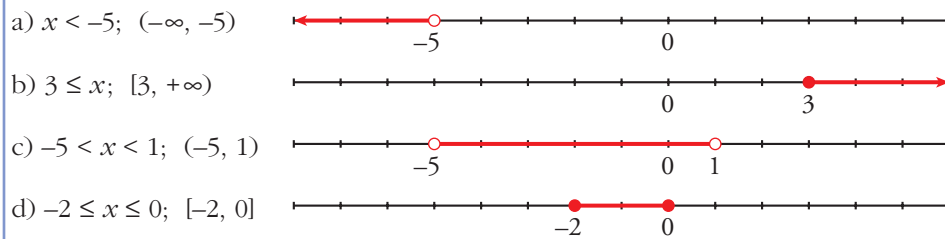
$$| \text{Error absoluto} | < 5 \cdot 10^3$$

$$| \text{Error relativo} | < 1,82 \cdot 10^{-3}$$

Intervalos y valor absoluto

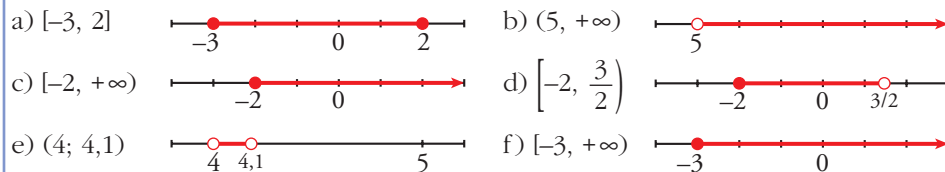
36 Expresa como desigualdad y como intervalo, y represéntalos:

- a) x es menor que -5 .
 b) 3 es menor o igual que x .
 c) x está comprendido entre -5 y 1 .
 d) x está entre -2 y 0 , ambos incluidos.



37 Representa gráficamente y expresa como intervalos estas desigualdades:

- a) $-3 \leq x \leq 2$ b) $5 < x$ c) $x \geq -2$
 d) $-2 \leq x < 3/2$ e) $4 < x < 4,1$ f) $-3 \leq x$



38 Escribe la desigualdad que verifica todo número x que pertenece a estos intervalos:

- a) $[-2, 7]$ b) $[13, +\infty)$ c) $(-\infty, 0)$
 d) $(-3, 0]$ e) $[3/2, 6)$ f) $(0, +\infty)$
 a) $-2 \leq x \leq 7$ b) $x \geq 13$ c) $x < 0$
 d) $-3 < x \leq 0$ e) $\frac{3}{2} \leq x < 6$ f) $x > 0$

39 Expresa como intervalo la parte común de cada pareja de intervalos $(A \cap B)$ e $(I \cap J)$:

- a) $A = [-3, 2]$ $B = [0, 5]$
 b) $I = [2, +\infty)$ $J = (0, 10)$
 a) $[0, 2]$
 b) $[2, 10)$

40 Escribe en forma de intervalos los números que verifican estas desigualdades:

a) $x < 3$ o $x \geq 5$

b) $x > 0$ y $x < 4$

c) $x \leq -1$ o $x > 1$

d) $x < 3$ y $x \geq -2$

• *Representalos gráficamente, y si son dos intervalos separados, como en a), escribe: $(-\infty, 3) \cup [5, +\infty)$*

a) $(-\infty, 3) \cup [5, \infty)$

b) $(0, 4)$

c) $(-\infty, -1] \cup (1, \infty)$

d) $[-2, 3)$

41 Expresa, en forma de intervalo, los números que cumplen cada una de estas expresiones:

a) $|x| < 7$

b) $|x| \geq 5$

c) $|2x| < 8$

d) $|x - 1| \leq 6$

e) $|x + 2| > 9$

f) $|x - 5| \geq 1$

a) $|x| < 7 \rightarrow -7 < x < 7 \rightarrow$ Intervalo $(-7, 7)$

b) $|x| \geq 5 \rightarrow x \leq -5$ o $x \geq 5 \rightarrow (-\infty, -5] \cup [5, +\infty)$

c) $|2x| < 8 \rightarrow |x| < 4 \rightarrow -4 < x < 4 \rightarrow$ Intervalo $(-4, 4)$

d) $|x - 1| \leq 6 \rightarrow -5 \leq x \leq 7 \rightarrow$ Intervalo $[-5, 7]$

e) $|x + 2| > 9 \rightarrow x < -11$ o $x > 7 \rightarrow (-\infty, -11) \cup (7, +\infty)$

f) $|x - 5| \geq 1 \rightarrow x \leq 4$ o $x \geq 6 \rightarrow (-\infty, 4] \cup [6, +\infty)$

42 Averigua qué valores de x cumplen:

a) $|x - 2| = 5$

b) $|x - 4| \leq 7$

c) $|x + 3| \geq 6$

a) 7 y -3

b) $-3 \leq x \leq 11$; $[-3, 11]$

c) $x \leq -9$ o $x \geq 3$; $(-\infty, -9] \cup [3, \infty)$

43 Escribe, mediante intervalos, los valores que puede tener x para que se pueda calcular la raíz en cada caso:

a) $\sqrt{x - 4}$

b) $\sqrt{2x + 1}$

c) $\sqrt{-x}$

d) $\sqrt{3 - 2x}$

e) $\sqrt{-x - 1}$

f) $\sqrt{1 + \frac{x}{2}}$

a) $x - 4 \geq 0 \Rightarrow x \geq 4$; $[4, +\infty)$

b) $2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \geq -1 \Rightarrow x \geq -\frac{1}{2}$; $[-\frac{1}{2}, +\infty)$

c) $-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 0$; $(-\infty, 0]$

$$d) 3 - 2x \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 3 \Rightarrow x \leq \frac{3}{2}; \left(-\infty, \frac{3}{2}\right]$$

$$e) -x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq -1; (-\infty, -1]$$

$$f) 1 + \frac{x}{2} \geq 0 \Rightarrow \frac{x}{2} \geq -1 \Rightarrow x \geq -2; [-2, +\infty)$$

- 44** Se llama distancia entre dos números a y b , al valor absoluto de la diferencia entre ellos:

$$d(a, b) = |a - b|$$

Halla la distancia entre los siguientes pares de números:

a) 7 y 3

b) 5 y 11

c) -3 y -9

d) -3 y 4

$$a) |7 - 3| = 4$$

$$b) |5 - 11| = 6$$

$$c) |-3 + 9| = 6$$

$$d) |-3 - 4| = 7$$

Página 46

- 45** Expresa como un único intervalo:

a) $(1, 6] \cup [2, 5)$

b) $[-1, 3) \cup (0, 3]$

c) $(1, 6] \cap [2, 7)$

d) $[-1, 3) \cap (0, 4)$

$$a) (1, 6] \cup [2, 5) = (1, 6]$$

$$b) [-1, 3) \cup (0, 3] = [-1, 3]$$

$$c) (1, 6] \cap [2, 7) = [2, 6]$$

$$d) [-1, 3) \cap (0, 4) = [0, 3)$$

Logaritmos

- 46** Calcula, utilizando la definición de logaritmo:

$$a) \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2}$$

$$b) \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1$$

$$a) \log_2 64 + \log_2 \frac{1}{4} - \log_3 9 - \log_2 \sqrt{2} = 6 - 2 - 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$b) \log_2 \frac{1}{32} + \log_3 \frac{1}{27} - \log_2 1 = -5 - 3 - 0 = -8$$

47 Calcula la base de estos logaritmos:

a) $\log_x 125 = 3$

b) $\log_x \frac{1}{9} = -2$

a) $\log_x 125 = 3 \rightarrow x^3 = 125 \rightarrow x = 5$

b) $\log_x \frac{1}{9} = -2 \rightarrow x^{-2} = \frac{1}{9} \rightarrow x = 3$

48 Calcula el valor de x en estas igualdades:

a) $\log 3^x = 2$

b) $\log x^2 = -2$

c) $7^x = 115$

d) $5^{-x} = 3$

a) $x = \frac{2}{\log 3} = 4,19$

b) $2 \log x = -2; x = \frac{1}{10}$

c) $x = \frac{\log 115}{\log 7} = 2,438$

d) $x = -\frac{\log 3}{\log 5} = -0,683$

49 Halla con la calculadora y comprueba el resultado con la potenciación.

a) $\log \sqrt{148}$

b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11})$

c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5})$

d) $\log_3 42,9$

e) $\log_5 1,95$

f) $\log_2 0,034$

a) 1,085

b) $\ln (2,3 \cdot 10^{11}) \approx 26,161 \rightarrow e^{26,161} \approx 2,3 \cdot 10^{11}$

c) $\ln (7,2 \cdot 10^{-5}) \approx -9,539 \rightarrow e^{-9,539} \approx 7,2 \cdot 10^{-5}$

d) 3,42

e) 0,41

f) -4,88

50 Halla el valor de x en estas expresiones aplicando las propiedades de los logaritmos:

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13$

b) $\log x = \log 36 - \log 9$

c) $\ln x = 3 \ln 5$

d) $\log x = \log 12 + \log 25 - 2 \log 6$

e) $\ln x = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 25$

• a) Por logaritmo de un producto: $\ln x = \ln (17 \cdot 13)$

a) $\ln x = \ln 17 + \ln 13 \rightarrow x = 17 \cdot 13 = 221 \rightarrow x = 221$

b) $\log x = \log \frac{36}{9} \rightarrow x = \frac{36}{9} = 4$

c) $\ln x = 3 \ln 5 \rightarrow x = 5^3 = 125 \rightarrow x = 125$

$$d) \log x = \log \frac{12 \cdot 25}{6^2} \rightarrow x = \frac{25}{3}$$

$$e) \ln x = 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 25 \rightarrow \ln x = \ln 2^4 - \ln 25^{1/2} \rightarrow$$

$$\rightarrow \ln x = \ln 16 - \ln 5 \rightarrow \ln x = \ln \frac{16}{5} \rightarrow x = \frac{16}{5}$$

- 51** Sabiendo que $\log 3 = 0,477$, calcula el logaritmo decimal de 30; 300; 3 000; 0,3; 0,03; 0,003.

$$\log 30 = \log (3 \cdot 10) = \log 3 + \log 10 = 0,477 + 1 = 1,477$$

$$\log 300 = \log (3 \cdot 10^2) = \log 3 + 2 \log 10 = 2,477$$

$$\log 3\,000 = 0,477 + 3 = 3,477$$

$$\log 0,3 = \log (3 \cdot 10^{-1}) = 0,477 - 1 = -0,523$$

$$\log 0,03 = \log (3 \cdot 10^{-2}) = 0,477 - 2 = -1,523$$

$$\log 0,003 = 0,477 - 3 = -2,523$$

- 52** Sabiendo que $\log k = 14,4$, calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $\log \frac{k}{100}$ b) $\log 0,1 k^2$ c) $\log \sqrt[3]{\frac{1}{k}}$ d) $(\log k)^{1/2}$

$$a) \log k - \log 100 = 14,4 - 2 = 12,4$$

$$b) \log 0,1 + 2 \log k = -1 + 2 \cdot 14,4 = 27,8$$

$$c) \frac{1}{3} (\log 1 - \log k) = -\frac{1}{3} \cdot 14,4 = -4,8$$

$$d) (14,4)^{1/2} = \sqrt{14,4} = 3,79$$

- 53** Calcula la base de cada caso:

a) $\log_x 1/4 = 2$

b) $\log_x 2 = 1/2$

c) $\log_x 0,04 = -2$

d) $\log_x 4 = -1/2$

➡ *Aplica la definición de logaritmo y las propiedades de las potencias para despejar x .*

$$\text{En c), } x^{-2} = 0,04 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100}$$

$$a) x^2 = \frac{1}{4} \rightarrow x = \frac{1}{2}$$

$$b) x^{1/2} = 2 \rightarrow x = 4$$

$$c) \frac{1}{x^2} = \frac{4}{100} \rightarrow x = 5$$

$$d) x^{-1/2} = 4 \rightarrow x = \frac{1}{16}$$

54 Halla el valor de x que verifica estas igualdades:

a) $3^x = 0,005$

b) $0,8^x = 17$

c) $e^x = 18$

d) $1,5^x = 15$

e) $0,5^x = 0,004$

f) $e^x = 0,1$

a) $x = \frac{\log 0,005}{\log 3} = -4,82$

b) $x = \frac{\log 17}{\log 0,8} = -12,70$

c) $e^x = 18 \rightarrow x = \ln 18 = 2,89 \rightarrow x = 2,89$

d) $x = \frac{\log 15}{\log 1,5} = 6,68$

e) $x = \frac{\log 0,004}{\log 0,5} = 7,97$

f) $e^x = 0,1 \rightarrow x = \ln 0,1 = -2,30 \rightarrow x = -2,30$

55 Calcula x para que se cumpla:

a) $x^{2,7} = 19$

b) $\log_7 3x = 0,5$

c) $3^{2+x} = 172$

a) $\log x^{2,7} = \log 19 \Rightarrow 2,7 \log x = \log 19 \Rightarrow \log x = \frac{\log 19}{2,7} = 0,47$
 $x = 10^{0,47} = 2,98$

b) $7^{0,5} = 3x \Rightarrow x = \frac{7^{0,5}}{3} = 0,88$

c) $\log 3^{2+x} = \log 172 \Rightarrow (2+x) \log 3 = \log 172 \Rightarrow 2+x = \frac{\log 172}{\log 3}$

$x = \frac{\log 172}{\log 3} - 2 = 2,69$

56 Si $\log k = x$, escribe en función de x :

a) $\log k^2$

b) $\log \frac{k}{100}$

c) $\log \sqrt{10k}$

a) $2 \log k = 2x$

b) $\log k - \log 100 = x - 2$

c) $\frac{1}{2} \log 10k = \frac{1}{2} (1+x)$

57 Comprueba que $\frac{\log \frac{1}{a} + \log \sqrt{a}}{\log a^3} = -\frac{1}{6}$ (siendo $a \neq 1$).

$$\frac{-\log a + 1/2 \log a}{3 \log a} = \frac{-1/2 \log a}{3 \log a} = -\frac{1}{6}$$

Ha de ser $a \neq 1$ para que $\log a \neq 0$ y podamos simplificar.

Problemas aritméticos

- 58** El depósito de la calefacción de un edificio contiene 25 000 l de gasóleo. Esta cantidad tarda en consumirse 40 días si la calefacción se enciende 5 horas diarias.

En el mes de enero ha hecho mucho frío y se ha encendido 6 horas diarias durante 25 días. ¿Cuántos litros de gasóleo quedan en el depósito?

☛ ¿Cuántos litros se consumen por hora?

$$40 \cdot 5 = 200 \text{ horas}$$

$$25\,000 : 200 = 125 \text{ l/h (consumo de gasóleo por hora)}$$

$$125 \cdot 6 \cdot 25 = 18\,750 \text{ l consumidos en enero.}$$

$$25\,000 - 18\,750 = 6\,250 \text{ litros quedan en el depósito.}$$

- 59** En una empresa hay dos fotocopiadoras que, trabajando 6 horas diarias, hacen 3 000 copias cada día.

Se quiere ampliar el negocio comprando otra fotocopiadora, de modo que se hagan 5 500 copias al día.

¿Cuántas horas al día tiene que trabajar cada una de las tres fotocopiadoras?

$$3\,000 : 12 = 250 \text{ copias por hora cada fotocopiadora.}$$

$$5\,500 : 250 = 22 \text{ horas diarias entre las tres.}$$

$22 : 3 = 7,\widehat{3} = 7 \text{ horas } 20 \text{ minutos}$ es el tiempo que tienen que trabajar las fotocopiadoras.

- 60** En un concurso se reparten 20 000 € entre las tres personas que han tardado menos tiempo en realizar una prueba.

La primera ha tardado 4 minutos; la segunda, 5 minutos, y la tercera, 8 minutos. ¿Cuánto dinero le corresponde a cada una?

☛ ¿Cuántos minutos han tardado entre los tres?

Debemos repartir 20 000 € de forma inversamente proporcional al tiempo empleado:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{8} = \frac{10}{40} + \frac{8}{40} + \frac{5}{40} = \frac{23}{40} \text{ tardarían entre los tres}$$

$$\text{Al primero le corresponde } \frac{20\,000 \cdot 10}{23} = 8\,695,65 \text{ €}$$

$$\text{Al segundo le corresponde } \frac{20\,000 \cdot 8}{23} = 6\,956,52 \text{ €}$$

$$\text{Al tercero le corresponde } \frac{20\,000 \cdot 5}{23} = 4\,347,83 \text{ €}$$

Página 47

- 61** Un automóvil consume $6,4$ l de gasolina por cada 100 km. ¿Cuántos kilómetros podrá recorrer con el depósito lleno en el que caben 52 l?

$$52 : 6,4 = 8,125$$

$$8,125 \cdot 100 = 812,5 \text{ km}$$

- 62** Varios amigos se reúnen en un bar y toman 15 refrescos pagando $18,75$ € en total. Uno de ellos tomó solo un refresco, otro tomó dos y el resto tomaron 3 refrescos cada uno. ¿Cuántos amigos fueron y cuánto tuvo que pagar cada uno?

$$18,75 : 15 = 1,25 \text{ € por refresco.}$$

$$1,25 \text{ paga el primero; } 2,5 \text{ paga el segundo} \rightarrow 3,75 \text{ € entre los dos.}$$

Los restantes toman $15 - 3 = 12$ refrescos.

$$12 : 3 = 4 \text{ amigos que paga cada uno } 3,75 \text{ €.}$$

Son 6 en total. Pagan $1,25$ €, $2,5$ € y $3,75$ € los otros cuatro.

- 63** En una granja hay 75 gallinas que consumen 450 kg de maíz en 30 días. Para aumentar la producción de huevos, se aumenta el número de gallinas a 200 y se compran 800 kg de maíz. ¿Cuántos días se podrá dar de comer a las gallinas?

$$450 : 30 = 15; \quad 15 : 75 = 0,2 \text{ kg de maíz es lo que come una gallina en un día.}$$

$$200 \cdot 0,2 = 40 \text{ kg por día para alimentar } 200 \text{ gallinas.}$$

$$800 : 40 = 20 \text{ días podrán comer las gallinas.}$$

- 64** Un empleado puede hacer los $\frac{2}{3}$ de un trabajo en 7 días trabajando 5 horas diarias, y otro, los $\frac{3}{5}$ del mismo trabajo en 8 días de 8 horas de trabajo. ¿Cuánto tiempo tardarán los dos juntos en hacer el trabajo, dedicando 6 horas diarias?

$$\text{Para hacer todo el trabajo el primero tarda: } 5 \cdot 7 \cdot \frac{3}{2} = \frac{105}{2} \text{ horas}$$

$$\text{Y el segundo: } 8 \cdot 8 \cdot \frac{5}{3} = \frac{320}{3}$$

$$\text{En } 1 \text{ hora los dos juntos hacen: } \frac{2}{105} + \frac{3}{320} = \frac{191}{6720}$$

$$\text{Para hacer todo el trabajo tardan: } \frac{6720}{191} = 35,1832 \text{ horas}$$

$$35,1832 : 6 \approx 5 \text{ días } 5 \text{ horas } 11 \text{ minutos.}$$

- 65** La fórmula $u = 145p$ relaciona, aproximadamente, el número de pasos por minuto u de una persona y su longitud p en metros. Si doy pasos de $0,70$ m, ¿cuál es mi velocidad en km/h?

$$u = 145 \cdot 0,7 = 101,5 \text{ pasos que doy en } 1 \text{ minuto.}$$

$101,5 \cdot 0,7 = 71,05$ m que recorro en un minuto.

$71,05 \cdot 60 = 4263$ m que recorro en una hora.

4,263 km/h es mi velocidad.

- 66** Dos amigas, trabajando juntas, emplearían 3 días para hacer un trabajo. Después del primer día, una de las dos lo tiene que dejar. Continúa la otra sola y tarda 6 días en acabar el trabajo. ¿En cuántos días haría el trabajo cada una aisladamente?

Después del primer día quedan por hacer los $\frac{2}{3}$ y como la segunda amiga tarda 6 días, para hacer todo el trabajo tardaría $\frac{6 \cdot 3}{2} = 9$ días.

La primera hace por día $\frac{1}{3} - \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$ del trabajo.

Por tanto, tardaría en hacer todo el trabajo $\frac{9}{2} = 4,5$ días.

- 67** Una parcela de 45 m de ancho y 70 m de largo cuesta 28 350 €. ¿Cuánto costará otra parcela de terreno de igual calidad de 60 m \times 50 m?

La parcela inicial mide $45 \cdot 70 = 3150$ m²

El precio del metro cuadrado es de $28350 : 3150 = 9$ euros.

La otra parcela costará $60 \cdot 50 \cdot 9 = 27000$ euros.

- 68** Dos poblaciones A y B distan 350 km. A la misma hora sale un autobús de A hacia B a una velocidad de 80 km/h y un turismo de B hacia A a 120 km/h. ¿Cuándo se cruzarán?

☛ Se aproximan a $80 + 120 = 200$ km/h. ¿Cuánto tardarán en recorrer los 350 km a esa velocidad?

Si se aproximan a $80 + 120 = 200$ km/h, en recorrer 350 km tardarán:

$$t = \frac{350}{200} = 1,75 \text{ horas} = 1 \text{ hora y } 45 \text{ minutos}$$

- 69** Un automóvil tarda 3 horas en ir de A a B y otro tarda 5 horas en ir de B a A. Calcula el tiempo que tardarán en encontrarse si salen simultáneamente cada uno de su ciudad.

☛ ¿Qué fracción de la distancia AB recorre cada uno en una hora? ¿Y entre los dos?

El primero recorre $\frac{1}{3}$ del camino en 1 hora.

El segundo recorre $\frac{1}{5}$ del camino en 1 hora.

Entre los dos recorren: $\frac{1}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}$ del camino en 1 hora.

Tardarán $\frac{15}{8}$ h = 1 h 52' 30" en encontrarse.

AUTOEVALUACIÓN

1. Dados los números:

$$-\frac{58}{45}; \frac{51}{17}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[4]{-3}; \sqrt[3]{-8}; \sqrt[5]{2^3}; 1,0\widehat{7}$$

a) Clasifícalos indicando a cuáles de los conjuntos \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} o \mathbb{R} , pertenecen.

b) Ordena de menor a mayor los reales.

c) ¿Cuáles de ellos pertenecen al intervalo $(-2, 11/9)$?

a) \mathbb{N} : $\frac{51}{17}$

\mathbb{Z} : $\frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}$

\mathbb{Q} : $\frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\widehat{7}$

\mathbb{R} : $\frac{51}{17}; \sqrt[3]{-8}; -\frac{58}{45}; 1,0\widehat{7}; \frac{\pi}{3}; \sqrt[5]{2^3}$

b) $\sqrt[3]{-8} < -\frac{58}{45} < \frac{\pi}{3} < 1,0\widehat{7} < \sqrt[5]{2^3} < \frac{51}{17}$

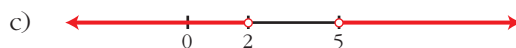
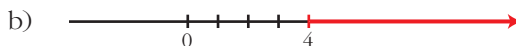
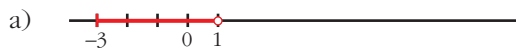
c) $-\frac{58}{45}; \frac{\pi}{3}; 1,0\widehat{7}$

2. Representa los siguientes conjuntos:

a) $\{x / -3 \leq x < 1\}$

b) $[4, +\infty)$

c) $(-\infty, 2) \cup (5, +\infty)$



3. Expresa en forma de intervalo en cada caso:

a) $|x| \geq 8$

b) $|x - 4| < 5$

a) $(-\infty, -8] \cup [8, +\infty)$

b) $(-1, 9)$

4. Escribe como potencia y simplifica:

$$(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}) : (a\sqrt{a})$$

$$(\sqrt[4]{a^3} \cdot a^{-1}) : (a\sqrt{a}) = (a^{3/4} \cdot a^{-1}) : (a \cdot a^{1/2}) = (a^{3/4-1}) : (a^{1+1/2}) = (a^{-1/4}) : (a^{3/2}) = a^{-1/4-3/2} = a^{-7/4}$$

5. Multiplica y simplifica:

$$\sqrt[3]{9a^2b} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2}$$

Reducimos los radicales a índice común:

$$\text{mín.c.m. (3, 6)} = 6 \rightarrow \sqrt[3]{9a^2b} = \sqrt[6]{(9a^2b)^2}$$

$$\sqrt[3]{9a^2b} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2} = \sqrt[6]{9^2a^4b^2} \cdot \sqrt[6]{18a^3b^2} = \sqrt[6]{9^2a^4b^2 \cdot 18a^3b^2} = \sqrt[6]{2 \cdot 9^3a^7b^4} = \sqrt[6]{2 \cdot 3^6a^7b^4} = 3a\sqrt[6]{2ab^4}$$

6. Racionaliza:

$$\text{a) } \frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3 - \sqrt{3}}$$

$$\text{a) } \frac{4 + \sqrt{6}}{2\sqrt{3}} = \frac{(4 + \sqrt{6})(\sqrt{3})}{(2\sqrt{3})(\sqrt{3})} = \frac{4\sqrt{3} + \sqrt{18}}{2 \cdot 3} = \frac{4\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} = \frac{2}{3}\sqrt{3} + \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\text{b) } \frac{2}{3 - \sqrt{3}} = \frac{2(3 + \sqrt{3})}{(3 - \sqrt{3})(3 + \sqrt{3})} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{9 - 3} = \frac{6 + 2\sqrt{3}}{6} = 1 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$$

7. Reduce:

$$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175}$$

$$\sqrt{63} - 2\sqrt{28} + \sqrt{175} = \sqrt{3^2 \cdot 7} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7} + \sqrt{5^2 \cdot 7} = 3\sqrt{7} - 4\sqrt{7} + 5\sqrt{7} = 4\sqrt{7}$$

8. Aplica la definición de logaritmo y obtén x :

$$\text{a) } \log_3 x = -1$$

$$\text{b) } \log x = 2,5$$

$$\text{c) } \ln x = 2$$

$$\text{a) } \log_3 x = -1 \rightarrow x = 3^{-1} \rightarrow x = \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \log x = 2,5 \rightarrow x = 10^{2,5} \rightarrow x = 10^{5/2} = \sqrt{10^5} = 10^2\sqrt{10}$$

$$\text{c) } \ln x = 2 \rightarrow x = e^2$$

9. Calcula x en cada caso.

a) $2,5^x = 0,0087$

b) $1,005^{3x} = 143$

a) $x \log 2,5 = \log 0,0087 \rightarrow x = \frac{\log 0,0087}{\log 2,5} = -5,18$

b) $1,005^{3x} = 143$

Tomamos logaritmos:

$$\log 1,005^{3x} = \log 143 \rightarrow 3x \log 1,005 = \log 143 \rightarrow x = \frac{\log 143}{3 \log 1,005} \approx 331,68$$

10. Efectúa la siguiente operación, expresa el resultado con tres cifras significativas y da una cota del error absoluto y otra del error relativo:

$$(5 \cdot 10^{-18}) \cdot (3,52 \cdot 10^{15}) : (-2,18 \cdot 10^{-7})$$

$$(5 \cdot 10^{-18}) \cdot (3,52 \cdot 10^{15}) : (-2,18 \cdot 10^{-7}) = (1,76 \cdot 10^{-2}) : (-2,18 \cdot 10^{-7}) = \\ = -8,0734 \cdot 10^4 \approx -8,07 \cdot 10^4$$

$$|\text{Error absoluto}| < 0,005 \cdot 10^4 = 5 \cdot 10^1$$

$$|\text{Error relativo}| < \frac{5 \cdot 10^1}{8,07 \cdot 10^4} = 6,2 \cdot 10^{-4}$$

11. Expresa con un solo logaritmo y di el valor de A :

$$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log A$$

$$\log 5 + 2 \log 3 - \log 4 = \log 5 + \log 3^2 - \log 4 = \log \left(\frac{5 \cdot 9}{4} \right) \rightarrow A = \frac{45}{4}$$