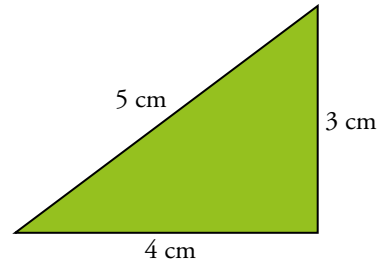


Ángulos rectos en la antigüedad

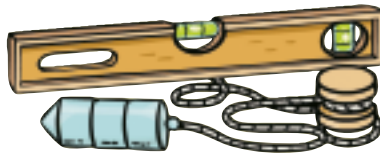
1. ¿Te animas a hacer, con hilo y alfileres, ángulos rectos como los hacían los egipcios y los indios? O bien, simplemente, dibuja un triángulo de lados 3 cm, 4 cm, 5 cm (o 5, 12 y 13) y comprueba que es rectángulo.

Actividad manipulativa.



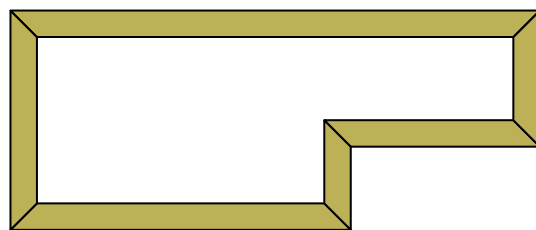
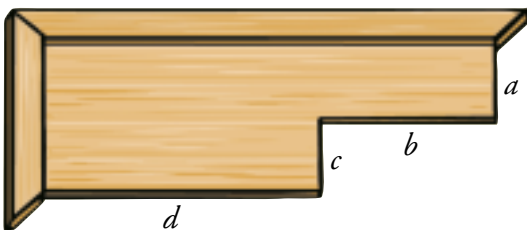
Herramientas para conseguir ángulos

2. ¿Qué tipo de ángulos se consiguen con ellos en las paredes?

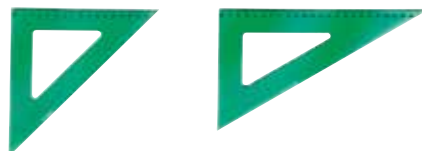


Con el nivel y la plomada se consiguen ángulos rectos.

3. A este tablero aún le faltan cuatro listones. Dibújalos en tu cuaderno.



4. Observa tu escuadra y tu cartabón.



Averigua cómo son los tres ángulos de cada una de estas dos reglas.

Escuadra: 45°, 45°, 90°

Cartabón: 30°, 60°, 90°

¡Inténtalo!

5. ¿Cuánto tiempo son un millón de segundos?

Exprésalo en semanas, días, horas y minutos.

Una semana, 4 días, 13 horas y un poco menos de 47 minutos.

1 Elementos geométricos básicos

Página 197

1. ¿Verdadero o falso?

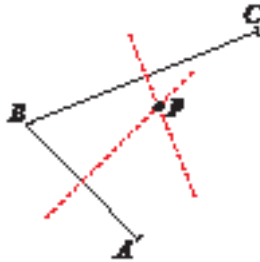
Ayúdate con dibujos. Considera todos los casos, todas las posibilidades.

- a) **Tenemos una recta, r , y dos puntos exteriores, P y Q , que están a la misma distancia de r . Entonces, es imposible trazar una recta paralela a r que pase por P y que no pase por Q .**
 - b) **A , B y C son tres puntos distintos. Sabemos que la recta AB coincide con la recta BC . Entonces, con seguridad, la recta AB coincide con la recta AC .**
 - c) **Dos semirrectas solo pueden tener un punto en común.**
 - d) **Si dos semirrectas tienen más de un punto en común, entonces una de ellas está contenida en la otra.**
 - e) **Lo que tienen en común una recta y un semiplano es, siempre, una semirrecta.**
- a) Falso. Es posible si P y Q están cada uno en uno de los semiplanos en que la recta divide al plano.
 - b) Verdadero.
 - c) Falso. Pueden tener infinitos puntos en común.
 - d) Falso. Pueden tener un segmento como intersección.
 - e) Falso. Si la recta es paralela al borde del semiplano, tendrían en común una recta.

2 Dos rectas importantes

Página 198

1. Dibuja dos segmentos concatenados, AB y BC . Traza sus mediatrices y llama P al punto en que se cortan.



— Comprueba que $\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{PC}$.

— Razona por qué P está a la misma distancia (equidista) de A , de B y de C .

Por estar P en la mediatriz de AB , la distancia de P a A es igual a la distancia de P a B .

Por estar P en la mediatriz de BC , la distancia de P a B es igual a la distancia de P a C .

Por tanto, la distancia de P a A , B y C es la misma.

2. Dibuja en tu cuaderno dos ángulos $\sphericalangle s$ y $\sphericalangle t$ como se ve en la figura.



— Traza sus bisectrices, b y b' , que se cortan en un punto P .

— Razona que las distancias del punto P a las rectas r , s y t coinciden.

Por estar P en la bisectriz de $\sphericalangle s$, la distancia de P a r es igual a la distancia de P a s .

Por estar P en la bisectriz de $\sphericalangle t$, la distancia de P a s es igual a la distancia de P a t .

Por tanto, la distancia de P a r , a s y a t es la misma.

3 Ángulos

Página 199

1. **¿Verdadero o falso?**

a) **Si dos ángulos suplementarios son iguales, entonces ambos son rectos.**

b) **Dos ángulos complementarios no pueden ser iguales.**

c) **El suplementario de un ángulo agudo es un ángulo obtuso.**

a) Verdadero.

b) Falso. Dos ángulos de 45° son complementarios e iguales.

c) Verdadero.

4 Medida de ángulos

Página 200

1. ¿Cuántos minutos son 5° ? ¿Y 7° ? ¿Y 18° ?

$$5^\circ = 5 \cdot 60' = 300'$$

$$7^\circ = 7 \cdot 60' = 420'$$

$$18^\circ = 18 \cdot 60' = 1080'$$

2. Pasa a segundos las siguientes expresiones:

a) $3'$

b) $5'$

c) $10'$

d) $15'$

$$a) 3' = 3 \cdot 60'' = 180''$$

$$b) 5' = 5 \cdot 60'' = 300''$$

$$c) 10' = 10 \cdot 60'' = 600''$$

$$d) 15' = 15 \cdot 60'' = 900''$$

3. Transforma en minutos estas cantidades:

a) $120''$

b) $180''$

c) $3600''$

$$a) 120'' = (120 : 60)' = 2'$$

$$b) 180'' = (180 : 60)' = 3'$$

$$c) 3600'' = (3600 : 60)' = 60'$$

4. Pasa a grados las siguientes expresiones:

a) $60'$

b) $180'$

c) $240'$

d) $120'$

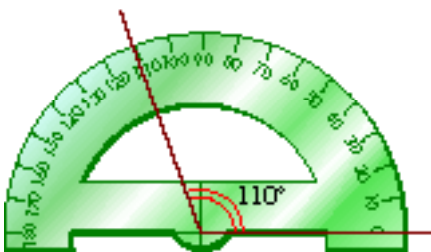
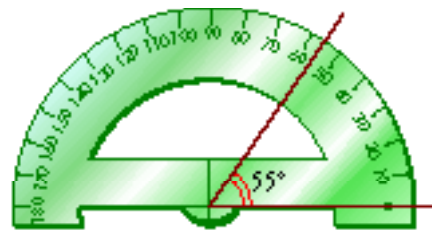
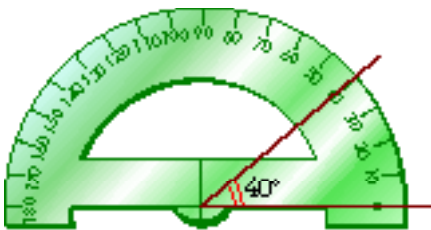
$$a) 60' = 1^\circ$$

$$b) 180' = (180 : 60)^\circ = 3^\circ$$

$$c) 240' = (240 : 60)^\circ = 4^\circ$$

$$d) 120' = (120 : 60)^\circ = 2^\circ$$

5. Con la ayuda del transportador, dibuja en tu cuaderno ángulos de 40° , 55° , 110° y 175° .



6. Calcula el ángulo suplementario de los ángulos que has dibujado en la actividad anterior.

$$\text{Suplementario de } 40^\circ: 180^\circ - 40^\circ = 140^\circ$$

$$\text{Suplementario de } 55^\circ: 180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$$

$$\text{Suplementario de } 110^\circ: 180^\circ - 110^\circ = 70^\circ$$

$$\text{Suplementario de } 175^\circ: 180^\circ - 175^\circ = 5^\circ$$

7. Pasa a segundos:

a) $53^\circ 45' 13''$

b) $81^\circ 37'$

c) $26^\circ 11''$

a) $53^\circ 45' 13'' = (53 \cdot 3600)'' + (45 \cdot 60)'' + 13'' = 190800'' + 2700'' + 13'' = 193513''$

b) $81^\circ 37' = (81 \cdot 3600)'' + (37 \cdot 60)'' = 291600'' + 2220'' = 293820''$

c) $26^\circ 11'' = (26 \cdot 3600)'' + 11'' = 93600'' + 11'' = 93611''$

8. Pasa a forma compleja:

a) $32220''$

b) $59233''$

c) $9123''$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 32220'' \overline{)60} \\ \underline{222} \quad 537' \\ 420 \\ \underline{00}'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 537' \overline{)60} \\ \underline{57} \quad 8^\circ \end{array}$$

$32220'' = 8^\circ 57' 0'' = 8^\circ 57'$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 59233'' \overline{)60} \\ \underline{523} \quad 987' \\ 433 \\ \underline{13}'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 987' \overline{)60} \\ \underline{387} \quad 16^\circ \\ 27' \end{array}$$

$59233'' = 16^\circ 27' 13''$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 9123'' \overline{)60} \\ \underline{312} \quad 152' \\ 123 \\ \underline{03}'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 152' \overline{)60} \\ \underline{32} \quad 2^\circ \end{array}$$

$9123'' = 2^\circ 32' 3''$

5 Operaciones con medidas angulares

Página 202

1. Realiza las siguientes operaciones:

a) $35^\circ 27' 14'' + 62^\circ 48' 56''$

b) $62^\circ 46'' + 25' 43'' + 39^\circ 58'$

c) $82^\circ 2' 7'' - 39^\circ 43' 27''$

d) $56^\circ 14' - 34^\circ 42''$

$$\begin{array}{r} 35^\circ \quad 27' \quad 14'' \\ + \quad 62^\circ \quad 48' \quad 56'' \\ \hline 97^\circ \quad 75' \quad 70'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97^\circ \quad 75' \quad 70'' \\ \quad \quad \quad \swarrow \downarrow \\ \quad \quad \quad 1' \quad 10'' \\ \hline 97^\circ \quad 76' \quad 10'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 97^\circ \quad 76' \quad 10'' \\ \quad \quad \quad \swarrow \downarrow \\ \quad \quad \quad 1^\circ \quad 16' \\ \hline 98^\circ \quad 16' \quad 10'' \end{array}$$

Resultado: $98^\circ 16' 10''$

$$\begin{array}{r} 62^\circ \quad \quad 46'' \\ \quad 25' \quad 43'' \\ + \quad 39^\circ \quad 58' \\ \hline 101^\circ \quad 83' \quad 89'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101^\circ \quad 83' \quad 89'' \\ \quad \quad \quad \swarrow \downarrow \\ \quad \quad \quad 1' \quad 29'' \\ \hline 101^\circ \quad 84' \quad 29'' \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 101^\circ \quad 84' \quad 29'' \\ \quad \quad \quad \swarrow \downarrow \\ \quad \quad \quad 1^\circ \quad 24' \\ \hline 102^\circ \quad 24' \quad 29'' \end{array}$$

Resultado: $102^\circ 24' 29''$

$$\begin{array}{r} 82^\circ \quad 2' \quad 7'' \\ - \quad 39^\circ \quad 43' \quad 27'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 81^\circ \quad 61' \quad 67'' \\ - \quad 39^\circ \quad 43' \quad 27'' \\ \hline 42^\circ \quad 18' \quad 40'' \end{array}$$

Resultado: $42^\circ 18' 40''$

$$\begin{array}{r} 56^\circ \quad 14' \\ - \quad 34^\circ \quad \quad 42'' \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 56^\circ \quad 13' \quad 60'' \\ - \quad 34^\circ \quad \quad 42'' \\ \hline 22^\circ \quad 13' \quad 18'' \end{array}$$

Resultado: $22^\circ 13' 18''$

2. Opera con medidas de tiempo.

a) $2 \text{ h } 20 \text{ min } 46 \text{ s} + 3 \text{ h } 55 \text{ min } 17 \text{ s}$

b) $1 \text{ h } 59 \text{ min } 50 \text{ s} + 33 \text{ min } 15 \text{ s}$

c) $5 \text{ h } 18 \text{ min } 30 \text{ s} - 3 \text{ h } 24 \text{ min } 47 \text{ s}$

d) $4 \text{ h } 50 \text{ s} - 2 \text{ h } 56 \text{ min } 59 \text{ s}$

$$\begin{array}{r} \text{a) } 2 \text{ h } 20 \text{ min } 46 \text{ s} \\ + 3 \text{ h } 55 \text{ min } 17 \text{ s} \\ \hline 5 \text{ h } 75 \text{ min } 63 \text{ s} \\ 5 \text{ h } 76 \text{ min } 3 \text{ s} \\ \mathbf{6 \text{ h } 16 \text{ min } 3 \text{ s}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{b) } 1 \text{ h } 59 \text{ min } 50 \text{ s} \\ + \quad 33 \text{ min } 15 \text{ s} \\ \hline 1 \text{ h } 92 \text{ min } 65 \text{ s} \\ 1 \text{ h } 93 \text{ min } 5 \text{ s} \\ \mathbf{2 \text{ h } 33 \text{ min } 5 \text{ s}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{c) } 5 \text{ h } 18 \text{ min } 30 \text{ s} \\ - 3 \text{ h } 24 \text{ min } 47 \text{ s} \\ \hline 1 \text{ h } 53 \text{ min } 43 \text{ s} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 4 \text{ h } 77 \text{ min } 90 \text{ s} \\ - 3 \text{ h } 24 \text{ min } 47 \text{ s} \\ \hline \mathbf{1 \text{ h } 53 \text{ min } 43 \text{ s}} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \text{d) } 4 \text{ h} \quad \quad 50 \text{ s} \\ - 2 \text{ h } 56 \text{ min } 59 \text{ s} \\ \hline 1 \text{ h } 3 \text{ min } 51 \text{ s} \end{array}$$

3. Halla el suplementario del ángulo de $108^\circ 49' 1''$.

$$180^\circ - 108^\circ 49' 1'' = 71^\circ 10' 59''$$

4. Efectúa:

a) $36^\circ 51'' + 2^\circ 11' 3'' + 46' 59''$

b) $37' 11'' \cdot 13$

a) $36^\circ 51'' + 2^\circ 11' 3'' + 46' 59'' = 38^\circ 57' 113'' = 38^\circ 58' 53''$

b) $37' 11'' \cdot 13 = 481' 143'' = 483' 23'' = 8^\circ 3' 23''$

5. Dado el ángulo $\hat{A} = 35^\circ 46' 23''$, halla:

a) $2\hat{A}$

b) $5\hat{A}$

c) $\frac{\hat{A}}{4}$

d) $\frac{2}{3} \cdot \hat{A}$

a) $2 \cdot (35^\circ 46' 23'') = 70^\circ 92' 46'' = 71^\circ 32' 46''$

b) $5 \cdot (35^\circ 46' 23'') = 175^\circ 230' 115'' = 175^\circ 231' 55'' = 178^\circ 51' 55''$

c)
$$\begin{array}{r} 35^\circ \quad 46' \quad 23'' \\ 3^\circ \quad \frac{180'}{226'} \quad 23'' \\ \hline 26 \quad \quad \quad \frac{120''}{143''} \\ 2' \quad \quad \quad 23 \\ \quad \quad \quad 3'' \end{array} \quad \begin{array}{l} \frac{4}{8^\circ 56' 35''} \\ \text{Cociente: } 8^\circ 56' 35'' \\ \text{Resto: } 3'' \end{array}$$

d) $2 \cdot \hat{A} = 71^\circ 32' 46''$

$$\begin{array}{r} 71^\circ \quad 32' \quad 46'' \\ 11 \quad \quad \quad \frac{3}{23^\circ 50' 55''} \\ 2^\circ \quad \frac{120'}{152'} \\ \hline 02 \quad \quad \quad \frac{120''}{166''} \\ 2' \quad \quad \quad 16 \\ \quad \quad \quad 1'' \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{Cociente: } 23^\circ 50' 55'' \\ \text{Resto: } 1'' \end{array}$$

6. Divide $151^\circ 6' 17''$ entre 7, de dos formas:

a) Como se acaba de explicar.

b) Pasándolo a segundos, dividiendo entre 7 y pasando el resultado a grados, minutos y segundos. ¿Obtienes lo mismo que en a)?

$$\begin{array}{r}
 \text{a) } 151^\circ \quad 6' \quad 17'' \quad \left| \begin{array}{l} 7 \\ \hline 21^\circ 35' 11'' \end{array} \right. \\
 \begin{array}{r} 11 \\ 4^\circ \end{array} \quad \begin{array}{r} 240' \\ \hline 246' \\ 36 \\ 1' \end{array} \quad \begin{array}{r} 60'' \\ \hline 77'' \\ 07 \\ 0'' \end{array} \\
 \text{Cociente: } 21^\circ 35' 11'' \\
 \text{Resto: } 0''
 \end{array}$$

$$\text{b) } 151^\circ 6' 17'' = (151 \cdot 3600)'' + (6 \cdot 60)'' + 17'' = 543600'' + 360'' + 17'' = 543977''$$

$$543977'' : 7 = 77711'' = 21^\circ 35' 11''$$

Se obtiene lo mismo que en el apartado a).

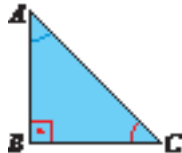
7. Un grifo llena $\frac{5}{12}$ de un depósito en una hora. ¿Cuánto tardará en llenar el depósito completo?

Si tarda 1 h en llenar $\frac{5}{12}$ del depósito, para llenarlo entero tardará $\frac{12}{5}$ de hora, que son 2 h y 24 min.

7 Ángulos en los polígonos

Página 205

1. En un triángulo rectángulo, \widehat{A} mide $42^\circ 20'$. ¿Cuánto mide \widehat{C} ?



$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{B} - \widehat{A} = 180^\circ - 90^\circ - 42^\circ 20' = 47^\circ 40'$$

2. Si un ángulo de un rombo mide 39° , ¿cuánto miden los demás?

Como los ángulos de los rombos son iguales dos a dos, habrá dos ángulos que miden 39° cada uno. Los otros dos ángulos medirán, cada uno:

$$(360^\circ - 2 \cdot 39^\circ) : 2 = 141^\circ$$

3. ¿Cuánto miden los ángulos iguales de una cometa con esta forma?



Como son iguales, cada uno medirá $(360^\circ - 100^\circ - 40^\circ) : 2 = 110^\circ$.

4. ¿Es posible construir un cuadrilátero con un solo ángulo recto? ¿Y con dos? ¿Y con tres?



Cuadrilátero con un solo ángulo recto.



Cuadrilátero con solo dos ángulos rectos.



Un cuadrilátero con tres ángulos rectos tiene que tener el cuarto ángulo recto obligatoriamente:

$$360^\circ - 3 \cdot 90^\circ = 90^\circ$$

Por tanto, no puede haber un cuadrilátero con solo 3 ángulos rectos.

5. Averigua cuánto suman todos los ángulos de un decágono cualquiera y cuánto mide cada ángulo de un decágono regular. Hazlo de dos formas:

a) Volviendo a hacer todo el razonamiento: “Un decágono regular se puede descomponer en ocho triángulos...”.

b) Aplicando las fórmulas anteriores.

a) Un decágono regular se puede descomponer en ocho triángulos. Los ángulos de cada uno de ellos suman 180° . Entre los ocho, los ángulos suman $8 \cdot 180^\circ = 1\,440^\circ$. Por tanto, los ángulos de un decágono cualquiera suman $1\,440^\circ$.

Cada ángulo de un decágono regular mide $1\,440^\circ : 10 = 144^\circ$.

b) Suma de los ángulos de un decágono: $(10 - 2) \cdot 180^\circ = 1\,440^\circ$

Cada uno de los ángulos de un decágono regular mide:

$$\frac{(10 - 2) \cdot 180^\circ}{10} = 144^\circ$$

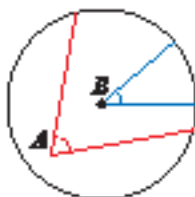
8 Ángulos en la circunferencia

Página 206

1. ¿Verdadero o falso?

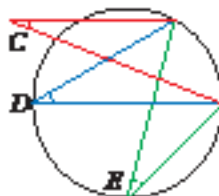
a) El ángulo \widehat{A} es central.

b) El ángulo \widehat{B} es central.



c) Los ángulos \widehat{C} y \widehat{D} son iguales.

d) Los ángulos \widehat{D} y \widehat{E} son iguales.



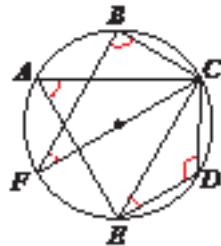
a) Falso. Su vértice debería estar en el centro de la circunferencia.

b) Verdadero.

c) Falso. El ángulo \widehat{C} no es inscrito.

d) Verdadero.

2. Teniendo en cuenta que cada arco señalado en la circunferencia es de 60° , di el valor de los ángulos marcados en rojo.



$$\overset{\circ}{\angle}AE = \frac{2 \cdot 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

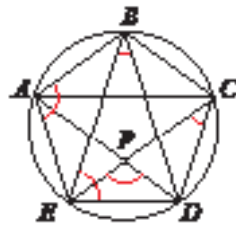
$$\overset{\circ}{\angle}BF = \frac{3 \cdot 60^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}DE = \frac{4 \cdot 60^\circ}{2} = 120^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}ED = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}FC = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$$

3. Averigua cuál es la medida angular de los cinco arcos iguales en que se ha dividido la circunferencia. Di el valor de los ángulos señalados en rojo.



$$\overset{\circ}{\angle}AB = \overset{\circ}{\angle}BC = \overset{\circ}{\angle}CD = \overset{\circ}{\angle}DE = \overset{\circ}{\angle}EA = 360^\circ : 5 = 72^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}BAE = \frac{3 \cdot 72^\circ}{2} = 108^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}DBE = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}DCE = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}BED = \frac{2 \cdot 72^\circ}{2} = 72^\circ$$

$$\overset{\circ}{\angle}CED = \overset{\circ}{\angle}ADE = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ \quad \overset{\circ}{\angle}DPE = 180^\circ - 2 \cdot 36^\circ = 108^\circ$$

4. Dibuja una semicircunferencia y recorta una esquina de una hoja de papel (ángulo recto).

Comprueba que, siempre que hagas pasar los lados del ángulo por los extremos del diámetro, el vértice estará situado sobre la semicircunferencia.


Respuesta abierta.



Ejercicios y problemas

Página 208

Operaciones con ángulos

1.  Efectúa las siguientes sumas:

a) $32^\circ 18' 22'' + 85^\circ 31' 7''$

b) $26^\circ 19' 15'' + 2^\circ 48' 36''$

c) $24^\circ 16' 27'' + 34' 13'' + 3^\circ 9' 20''$

a) $117^\circ 49' 29''$

b) $29^\circ 7' 51''$

c) 28°

2.  Resuelve estas restas:

a) $102^\circ 54' 27'' - 59^\circ 25' 37''$

b) $35^\circ 1' 46'' - 32^\circ 51' 49''$

c) $93^\circ 23'' - 28^\circ 23'$

a) $43^\circ 28' 50''$

b) $2^\circ 9' 57''$

c) $64^\circ 37' 23''$

3.  Haz los productos siguientes:

a) $(18^\circ 12' 3'') \cdot 4$

b) $(13^\circ 2' 35'') \cdot 5$

c) $(36^\circ 39' 27'') \cdot 8$


d) $(84^\circ 26'') \cdot 13$

a) $72^\circ 48' 12''$

b) $65^\circ 12' 55''$

c) $293^\circ 15' 36''$

d) $1\,092^\circ 5' 38''$

4.  Resuelve estas divisiones:

a) $(280^\circ 40' 20'') : 20$

b) $(121^\circ 52' 33'') : 11$

c) $(84^\circ 37' 52'') : 2$

d) $(190^\circ 42') : 7$

a) Cociente: $14^\circ 2' 1''$; resto: $0''$

b) Cociente: $11^\circ 4' 46''$; resto: $7''$

c) Cociente: $42^\circ 18' 56''$; resto: $0''$

d) Cociente: $27^\circ 14' 34''$; resto: $2''$

5.  Halla el complementario de los siguientes ángulos:

a) 24°

b) $86^\circ 23' 39''$

c) $52^\circ 29''$

d) $58' 24''$

a) $90^\circ - 24^\circ = 66^\circ$

b) $90^\circ - 86^\circ 23' 39'' = 3^\circ 36' 21''$

c) $90^\circ - 52^\circ 29'' = 37^\circ 59' 31''$

d) $90^\circ - 58' 24'' = 89^\circ 1' 36''$

6.  Halla, en cada caso, el suplementario del ángulo que se te da:

a) 103°

b) $89^\circ 28' 52''$

c) $129^\circ 31'$

d) $76^\circ 29''$


a) $180^\circ - 103^\circ = 77^\circ$

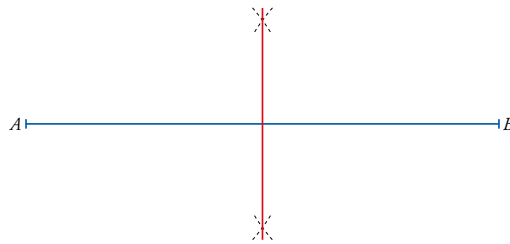
b) $180^\circ - 89^\circ 28' 52'' = 90^\circ 31' 8''$

c) $180^\circ - 129^\circ 31' = 50^\circ 29'$


d) $180^\circ - 76^\circ 29'' = 103^\circ 59' 31''$

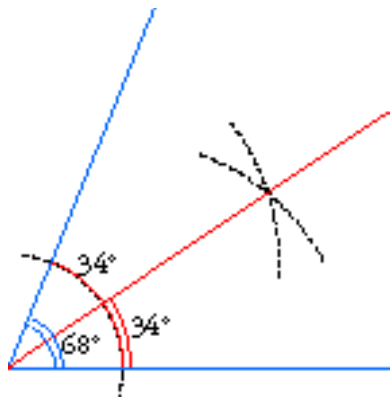
Construcciones geométricas


7.  Traza un segmento de 6 cm y construye su mediatriz. ¿Qué propiedad tienen sus puntos?

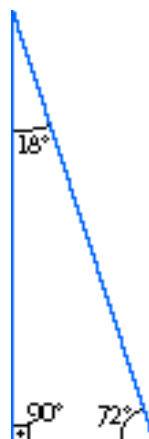



Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.

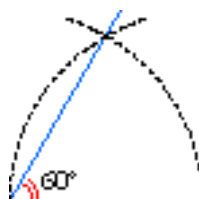
8.  Traza, con ayuda del transportador, un ángulo de 68° y construye su bisectriz. Comprueba que obtienes dos ángulos de 34° .




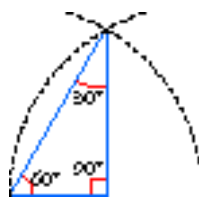
9.  Dibuja, con ayuda del transportador, un triángulo rectángulo con un ángulo de 72° .



10.  Construye un ángulo de 60° sin usar el transportador.



11.  Construye un triángulo semejante al cartabón; es decir, sus ángulos deben medir 60° , 90° y 30° .




12.  Dibuja dos semirrectas que tengan un segmento en común.

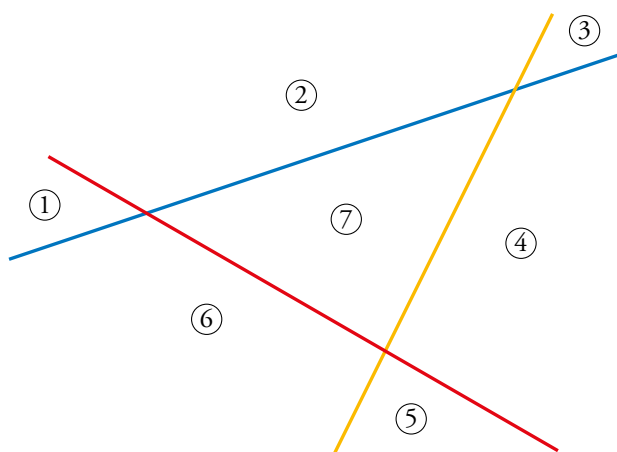


Una semirrecta tiene origen en A y va hacia la derecha y la otra tiene origen en B y va hacia la izquierda. El segmento en común es AB .

13.  Dibuja dos semirrectas que estén sobre la misma recta y no tengan nada en común.



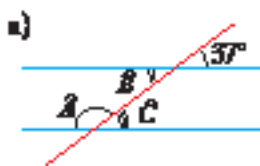
14.  Traza tres rectas que se corten dos a dos. Si se prolongaran indefinidamente, ¿en cuántas regiones dividirían al plano?



Dividirían al plano en 7 regiones.

Relaciones angulares

15.  Calcula el valor del ángulo α o de los ángulos que se piden en cada figura:



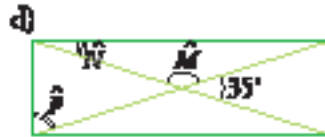
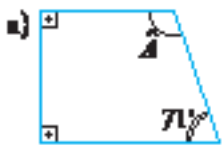
a) $\alpha = 180^\circ - 37^\circ = 143^\circ$

$\beta = 37^\circ$

$\gamma = 37^\circ$

b) $\alpha = 180^\circ - 90^\circ - 37^\circ = 53^\circ$

16.  Calcula el valor de los ángulos desconocidos.



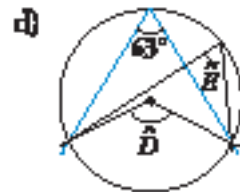
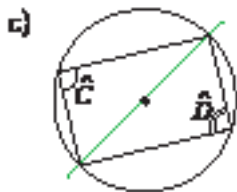
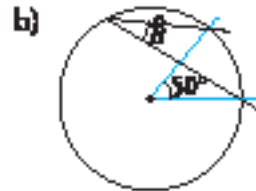
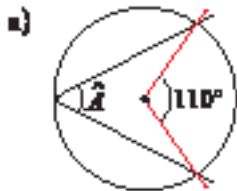
a) $\hat{A} = 360^\circ - 90^\circ - 90^\circ - 71^\circ = 109^\circ$

b) $\hat{B} = \hat{N} = \frac{360^\circ - 120^\circ - 120^\circ}{2} = 60^\circ$

c) $\hat{B} = 26^\circ$; $\hat{A} = \hat{X} = 180^\circ - 26^\circ = 154^\circ$

d) $\hat{N} = \frac{35^\circ}{2} = 17^\circ 30'$; $\hat{M} = 180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$; $\hat{B} = 90^\circ - 17^\circ 30' = 72^\circ 30'$

17.  Halla el valor de los ángulos indicados.



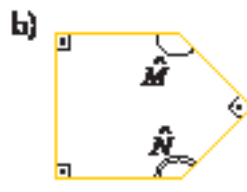
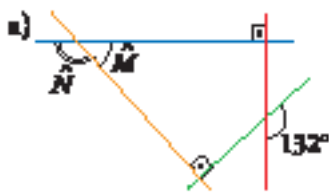
a) $\hat{A} = \frac{110^\circ}{2} = 55^\circ$

b) $\hat{B} = \frac{50^\circ}{2} = 25^\circ$

c) $\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$

d) $\hat{D} = 2 \cdot 63^\circ = 126^\circ$; $\hat{E} = 63^\circ$

18.  Calcula el valor del ángulo o de los ángulos que se piden en cada figura:



a) $\hat{M} = 180^\circ - 132^\circ = 48^\circ$

$\hat{N} = 132^\circ$

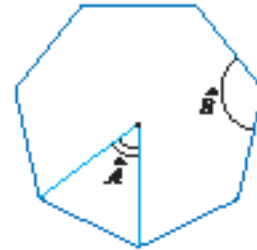
b) $\hat{M} = \hat{N} = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$


Resuelve problemas

19.  Halla el ángulo interior de un heptágono regular. Halla, también, su ángulo central.

$$\bar{A} = 360^\circ : 7 \approx 51^\circ 25' 43''$$

$$\bar{B} = \frac{(7 - 2) \cdot 180^\circ}{7} = \frac{5 \cdot 180^\circ}{7} = \frac{900^\circ}{7} \approx 128^\circ 34' 17''$$



20.  Siete agricultores han de repartirse el agua que llega de una acequia regando por turnos. ¿Cuánto tiempo al día puede regar cada uno?

$$1 \text{ día} \quad 86\,400 \text{ s}$$


Como son 7 agricultores, a cada agricultor le toca un turno de $86\,400 : 7 = 12\,342$ segundos y sobran 6 segundos al día.

Pasamos los segundos a horas:

$$12\,342 : 60 = 205 \text{ minutos y } 42 \text{ minutos}$$

$$205 : 60 = 3 \text{ horas y } 25 \text{ minutos.}$$

Por tanto, cada agricultor podrá regar al día 3 horas, 25 minutos y 42 segundos, y sobrarán 6 segundos al día.

21.  Un reloj se pone en hora a las 12 de la noche del 31 de marzo. A las 12 de la noche del 2 de junio el reloj ha adelantado 3 min 9 seg. ¿Cuánto adelanta cada día?

Han pasado 30 días de abril, 31 de mayo y 2 días de junio, que suman 63 días, durante los cuales el reloj se ha adelantado $(3 \cdot 60) + 9 = 189$ segundos.

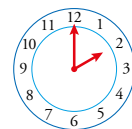
Por tanto, cada día adelanta $189 : 63 = 3$ segundos.

22.  a) ¿Qué ángulo forman las agujas de un reloj a las 2 en punto?

b) ¿Y a las 5 en punto?

c) ¿Y a las 5 y cuarto? Ten en cuenta que la aguja horaria ha recorrido la cuarta parte del arco que va de 5 a 6.

d) ¿Y a las 7 menos cuarto?




a) $(360^\circ : 12) \cdot 2 = 30^\circ \cdot 2 = 60^\circ$

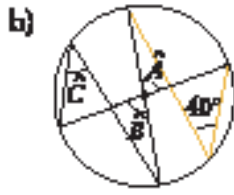
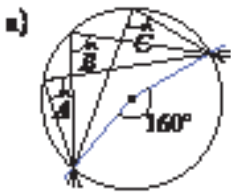
b) $(360^\circ : 12) \cdot 5 = 30^\circ \cdot 5 = 150^\circ$

c) $(360^\circ : 12) \cdot 2 + 30^\circ : 4 = 30^\circ \cdot 2 + 7^\circ 30' = 67^\circ 30'$

d) $(360^\circ : 12) \cdot 2 + 30^\circ : 4 = 30^\circ \cdot 2 + 7^\circ 30' = 67^\circ 30'$

Problemas “+”

23.  Halla el valor de los ángulos indicados:

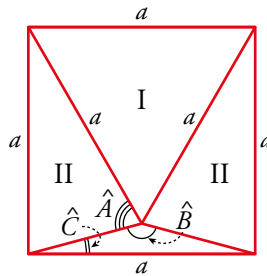


a) $W = B = X = \frac{160^\circ}{2} = 80^\circ$

b) $W = B = 2 \cdot 40^\circ = 80^\circ$; $X = 40^\circ$

24.  El triángulo I es equilátero. Los triángulos II son isósceles.

Halla la medida de los ángulos W , B y X .



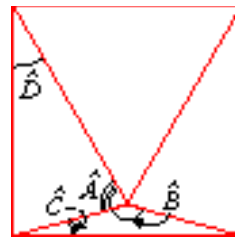
Los ángulos del triángulo equilátero I miden 60° . Por lo que el ángulo X medirá:


$$90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$$

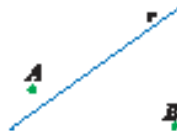
Así: $W = \frac{180^\circ - 30^\circ}{2} = 75^\circ$

$$B = 360^\circ - 2 \cdot 75^\circ - 60^\circ = 150^\circ$$

$$X = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ$$



25.  ¿Qué punto de r dista lo mismo de A que de B ? Calca en tu cuaderno y resuelve gráficamente.

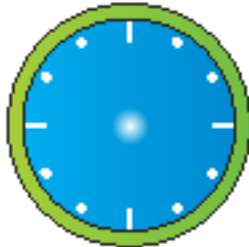


Se halla la mediatriz del segmento AB , que tiene la propiedad de que todos sus puntos equidistan de A y de B , y donde se corte esta recta con r , ese es el punto de r que dista lo mismo de A y de B .

Entrénate resolviendo problemas

Prueba, tantea, deduce...

- Aquí tienes un reloj analógico al que tienes que ponerle las agujas. Piensa en las condiciones pedidas y responde a las preguntas que se te plantean.



- ¿Qué hora es cuando la aguja de las horas está, exactamente, en una de las divisiones marcadas en este reloj y la del minuterero en la siguiente?
- ¿Qué hora es cuando la aguja de las horas está, exactamente, en una de las divisiones y la del minuterero en la anterior?
- ¿Qué hora es sabiendo que la aguja de las horas tardará en llegar a la marca de las seis justo el doble que la del minuterero?
- ¿Qué hora es sabiendo que la aguja de las horas tardará en llegar a la marca de las seis el triple que la del minuterero?

- a) Las once en punto.



- b) La una en punto.



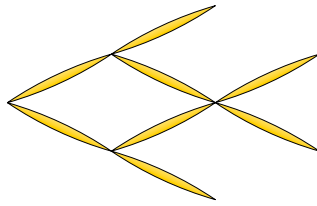
- c) Las cinco en punto. La aguja pequeña tardará una hora en llegar a la marca de las seis. El minuterero tardará media hora.



- d) Las cinco y cuarto. La aguja pequeña tardará tres cuartos de hora en llegar a la marca de las seis. El minuterero tardará un cuarto de hora.



- Hemos construido un pez con 8 palillos.



- a) Moviendo solo tres palillos, consigue que el pez vaya en la dirección contraria.
- b) Si movemos solo dos palillos, podemos conseguir un pez que mire en otra dirección. Compruébalo.



Autoevaluación

1. Realiza las siguientes operaciones con ángulos.

a) $27^{\circ} 30' 18'' + 3^{\circ} 42' 52''$

b) $17^{\circ} 21' 37'' - 4^{\circ} 48''$

c) $(3^{\circ} 27' 19'') \cdot 4$

d) $(12^{\circ} 4' 11'') : 5$

a) $27^{\circ} 30' 18'' + 3^{\circ} 42' 52'' = 30^{\circ} 72' 70'' = 31^{\circ} 13' 10''$

b) $17^{\circ} 21' 37'' - 4^{\circ} 48'' = 17^{\circ} 20' 97'' - 4^{\circ} 48'' = 13^{\circ} 20' 49''$

c) $(3^{\circ} 27' 19'') \cdot 4 = 12^{\circ} 108' 76'' = 13^{\circ} 49' 16''$

d) $(12^{\circ} 4' 11'') : 5 = 2^{\circ} 24' 50''$ Resto: $1''$

2. Pasa a segundos los ángulos de la actividad anterior y vuelve a realizar los cálculos. Expresa luego el resultado en forma compleja.

a) $27^{\circ} 30' 18'' = 99018''$

$3^{\circ} 42' 52'' = 13372''$

$99018'' + 13372'' = 112390''$

$(112390 : 60)'$ coeficiente: $1873'$; resto: $10''$

$(1873 : 60)^{\circ}$ coeficiente: 31° ; resto: $13'$

$112390'' = 31^{\circ} 13' 10''$

b) $17^{\circ} 21' 37'' = 62497''$

$4^{\circ} 48'' = 14448''$

$62497'' - 14448'' = 48049''$

$(48049 : 60)'$ coeficiente: $800'$; resto: $49''$

$(800 : 60)^{\circ}$ coeficiente: 13° ; resto: $20'$

$48049'' = 13^{\circ} 20' 49''$

c) $3^{\circ} 27' 19'' = 12439''$

$12439'' \cdot 4 = 49756''$

$(49756 : 60)'$ coeficiente: $829'$; resto: $16''$

$(829 : 60)^{\circ}$ coeficiente: 13° ; resto: $49'$

$49756'' = 13^{\circ} 49' 16''$

d) $12^{\circ} 4' 11'' = 43451''$

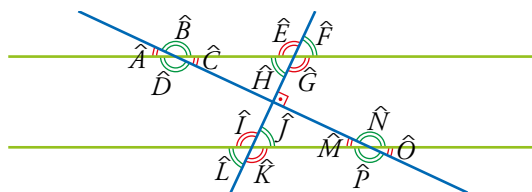
$43451'' : 5$ coeficiente: $8690''$; resto: $1''$

$(8690 : 60)'$ coeficiente: $144'$; resto: $50''$

$(144 : 60)''$ coeficiente: 2° ; resto: $24'$

$8690''$ resto $1'' = 2^{\circ} 24' 50''$ resto $1''$

3. Observa estos ángulos:



- a) Identifica dos ángulos complementarios y dos suplementarios.
- b) Indica dos ángulos opuestos por el vértice, dos correspondientes, dos alternos externos y dos alternos internos.
- c) Sabiendo que $\hat{M} = 25^\circ$, calcula el resto de ángulos.

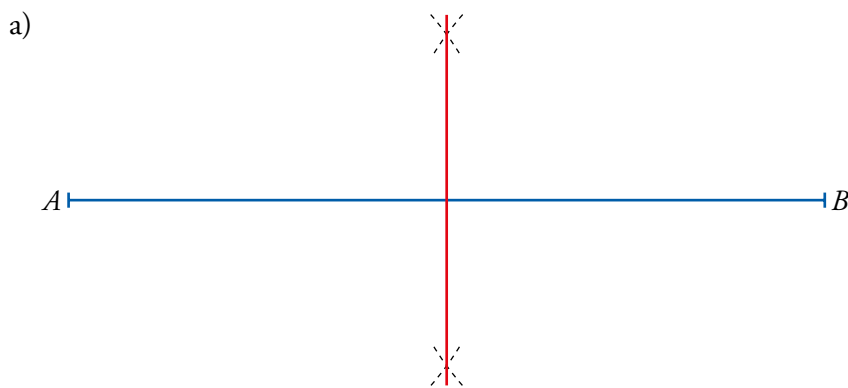
a) Ángulos complementarios: \hat{C} y \hat{H} ; \hat{V} y \hat{M}

Ángulos suplementarios: \hat{M} y \hat{B} ; \hat{C} y \hat{D} ; \hat{V} y \hat{W} ; \hat{C} y \hat{H} ; \hat{U} y \hat{V}
 \hat{Y} y \hat{K} ; \hat{M} y \hat{X} ; \hat{W} y \hat{D}

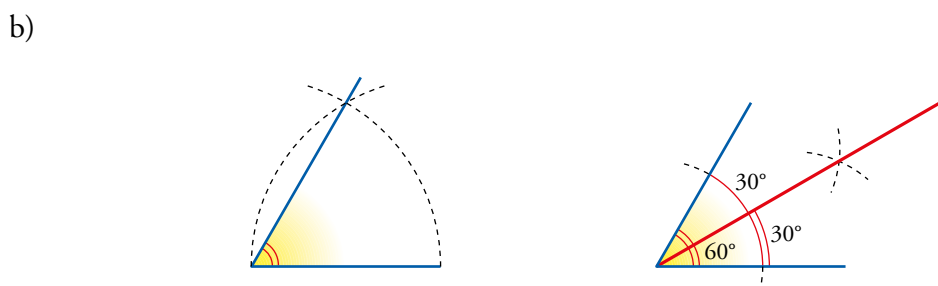
b) Ángulos opuestos por el vértice: \hat{M} y \hat{C} ; \hat{B} y \hat{D} ; \hat{V} y \hat{C} ; \hat{W} y \hat{H}
 \hat{U} y \hat{K} ; \hat{V} y \hat{Y} ; \hat{M} y \hat{D} ; \hat{X} y \hat{W}

c) $\hat{M} = \hat{C} = \hat{M} = \hat{D} = 25^\circ$
 $\hat{B} = \hat{D} = \hat{X} = \hat{W} = 155^\circ$
 $\hat{H} = \hat{V} = \hat{Y} = \hat{V} = 65^\circ$
 $\hat{V} = \hat{C} = \hat{U} = \hat{K} = 115^\circ$

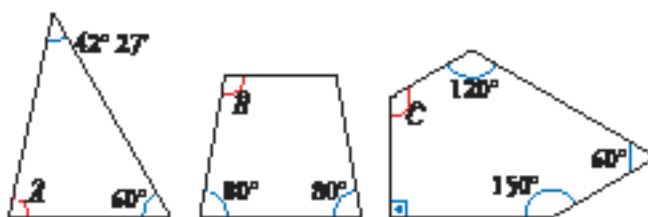
- 4. a) Dibuja un segmento AB de 10 cm y traza, con regla y compás, su mediatriz. ¿Qué propiedad cumplen todos sus puntos?
- b) Dibuja un ángulo de 60° . Traza, con regla y compás, la bisectriz del ángulo. Comprueba que cada uno de los ángulos generados son de 30° .



Todos los puntos de la mediatriz equidistan de los extremos del segmento.



5. Calcula el valor de los ángulos indicados:

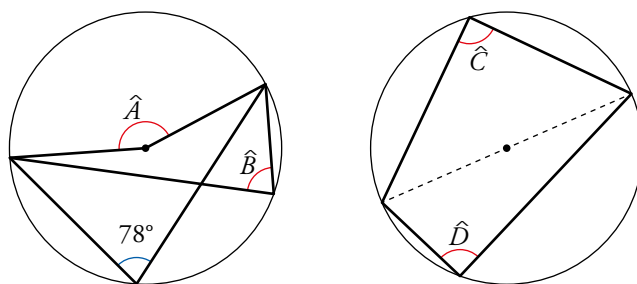


a) $\hat{W} = 180^\circ - (60^\circ + 42^\circ 27') = 180^\circ - 102^\circ 27' = 77^\circ 33'$

b) $\hat{B} = \frac{360^\circ - 2 \cdot 80^\circ}{2} = \frac{360^\circ - 160^\circ}{2} = \frac{200^\circ}{2} = 100^\circ$

c) $\hat{C} = 540^\circ - (120^\circ + 150^\circ + 60^\circ + 90^\circ) = 540^\circ - 420^\circ = 120^\circ$

6. Halla los ángulos indicados:



$\hat{W} = 78^\circ \cdot 2 = 156^\circ$

$\hat{B} = 78^\circ$

$\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$