

Resuelve

1. Infórmate y resume, en unas pocas líneas, los datos más relevantes en la vida de René Descartes.

Nació en La Haye, Francia, en 1596 y murió en Estocolmo en 1650. Su familia pertenecía a la rica burguesía, por lo que fue educado en un colegio considerado uno de los más famosos de Europa. Descartes tuvo una vida muy agitada y repleta de viajes. Tras alistarse en el ejército y dedicar varios años a la meditación, en 1629 marchó a los Países Bajos, donde conoció a Isaac Beechmann, doctor holandés que le animó a reanudar los estudios; de esta forma Descartes encontró su verdadera vocación.

Su mayor aportación a las matemáticas fue un tratado sobre geometría, *La Géométrie*. En este trabajo consigue establecer una relación entre la geometría y el álgebra, que por entonces caminaban por separado, dando lugar al nacimiento de la geometría analítica.

2. ¿Cuántos ejes de coordenadas tiene un sistema cartesiano capaz de fijar la posición de una araña que camina por una pared? ¿Y para fijar la posición de una mosca que vuela por la habitación?

Para la araña que camina por la pared solo necesitamos dos coordenadas; para la mosca, tres.

3. Indica las coordenadas de los puntos A , B , C , D y M , en el cuadro de la araña y la mosca. Comprueba que todos ellos responden a la ecuación mencionada.

$A(0, 6)$; $M(10, 11)$; $B(4, 8)$; $C(6, 9)$; $D(8, 10)$

$$A: y = \frac{0}{2} + 6 = 6$$

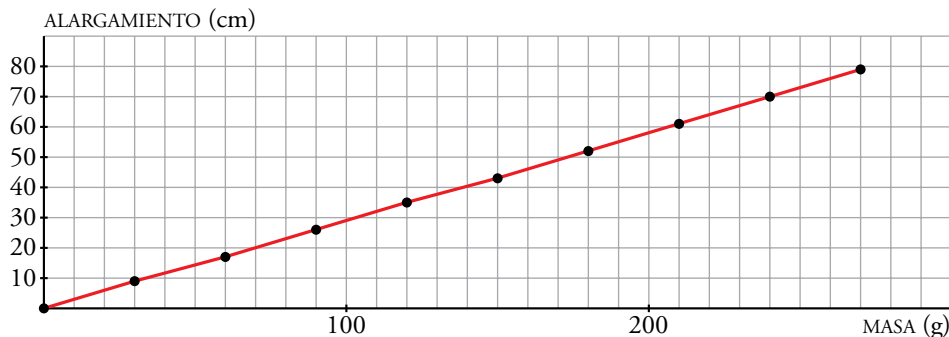
$$M: y = \frac{10}{2} + 6 = 5 + 6 = 11$$

$$B: y = \frac{4}{2} + 6 = 2 + 6 = 8$$

$$C: y = \frac{6}{2} + 6 = 3 + 6 = 9$$

$$D: y = \frac{8}{2} + 6 = 4 + 6 = 10$$

4. Representa sobre unos ejes cartesianos los valores de la tabla que relaciona la masa y el alargamiento del muelle. Comprueba que están alineados y que responden, aproximadamente, a la fórmula $A = 0,29 \cdot M$.



$$(0, 0): A = 0,29 \cdot 0 = 0$$

$$(30, 9): A = 0,29 \cdot 30 = 8,7 \approx 9$$

$$(60, 17): A = 0,29 \cdot 60 = 17,4 \approx 17$$

$$(90, 26): A = 0,29 \cdot 90 = 26,1 \approx 26$$

Se puede comprobar que los demás pares también cumplen, aproximadamente, la fórmula.

1 Función de proporcionalidad $y = mx$

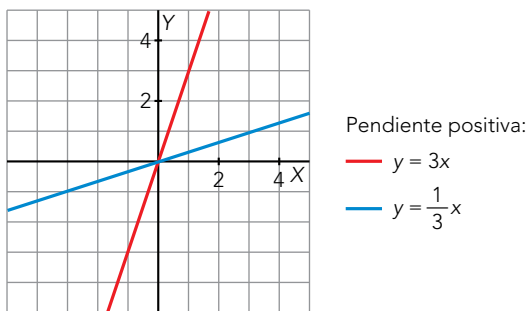
Página 164

- 1. Dibuja sobre unos ejes cartesianos, en papel cuadrulado, dos rectas que pasen por el origen y que tengan pendientes positivas y otras dos con pendientes negativas.**

Para que las rectas pasen por el origen, deben ser de la forma $y = mx$, siendo m la pendiente de la recta.

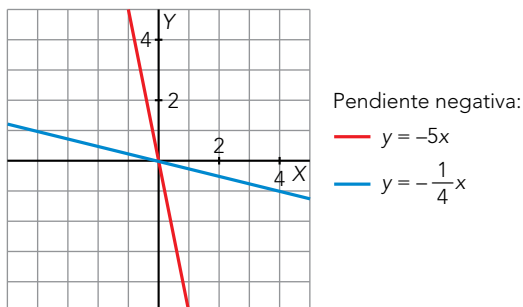
Ejemplos de rectas con pendiente positiva:

- $y = 3x$, con pendiente 3 e $y = \frac{1}{3}x$, con pendiente $\frac{1}{3}$.



Ejemplos de rectas con pendiente negativa:

- $y = -5x$, con pendiente -5 e $y = -\frac{1}{4}x$, con pendiente $-\frac{1}{4}$.



Página 165

2. Representa las funciones siguientes:

a) $y = x$

b) $y = 2x$

c) $y = -x$

d) $y = -2x$

e) $y = \frac{1}{3}x$

f) $y = -\frac{1}{3}x$

g) $y = \frac{3}{2}x$

h) $y = -\frac{3}{2}x$

i) $y = \frac{2}{3}x$

Representamos las funciones:

a)

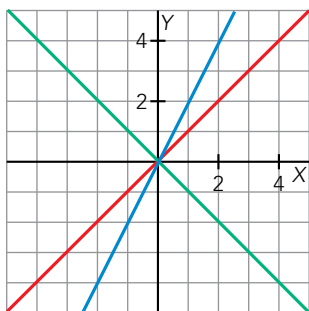
x	y = x
-3	-3
0	0
3	3

b)

x	y = 2x
-2	-4
0	0
2	4

c)

x	y = -x
-2	2
0	0
2	-2



— a) $y = x$

— b) $y = 2x$

— c) $y = -x$

d)

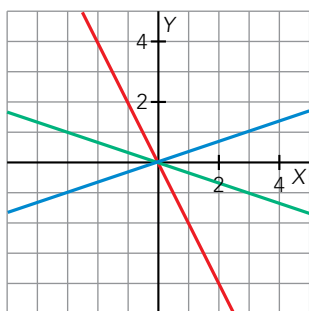
x	y = -2x
-1	2
0	0
1	-2

e)

x	y = 1/3x
-3	-1
0	0
3	1

f)

x	y = -1/3x
-3	1
0	0
3	-1



— d) $y = -2x$

— e) $y = \frac{1}{3}x$

— f) $y = -\frac{1}{3}x$

g)

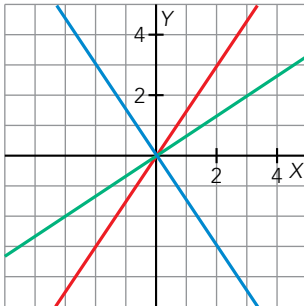
x	y = 3/2x
-2	-3
0	0
2	3

h)

x	y = -3/2x
-2	3
0	0
2	-3

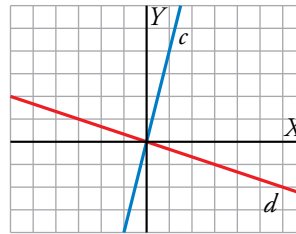
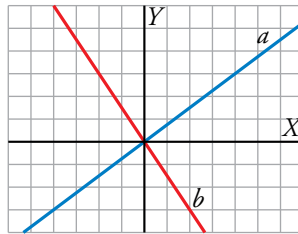
i)

x	y = 2/3x
-3	-2
0	0
3	2



— g) $y = \frac{3}{2}x$
 — h) $y = -\frac{3}{2}x$
 — i) $y = \frac{2}{3}x$

3. Halla las ecuaciones de las rectas siguientes:



Buscamos puntos de coordenadas enteras para calcular la pendiente.

- La recta a pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(4, 3)$. Su pendiente es $\frac{3}{4}$. Su ecuación es $y = \frac{3}{4}x$.
- La recta b pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(2, -3)$. Su pendiente es $-\frac{3}{2}$. Su ecuación es $y = -\frac{3}{2}x$.
- La recta c pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(1, 4)$. Su pendiente es 4 . Su ecuación es $y = 4x$.
- La recta d pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(6, -2)$. Su pendiente es $-\frac{2}{6} = -\frac{1}{3}$. Su ecuación es $y = -\frac{1}{3}x$.

2 La función $y = mx + n$

Página 166

1. Representa en unos ejes cartesianos, sobre papel cuadriculado, las rectas de ecuaciones:

a) $y = 3x - 2$

b) $y = 3 - 2x$

c) $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d) $y = \frac{2}{3}x - 5$

e) $y = -2$

f) $y = \frac{5x - 3}{2}$

Representamos las funciones:

a)

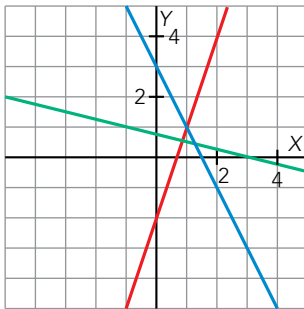
x	$y = 3x - 2$
-1	-5
0	-2
1	1

b)

x	$y = 3 - 2x$
-1	5
0	3
1	1

c)

x	$y = 3/4 - 1/4x$
-1	1
0	3/4
3	0



- a) $y = 3x - 2$
- b) $y = 3 - 2x$
- c) $y = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$

d)

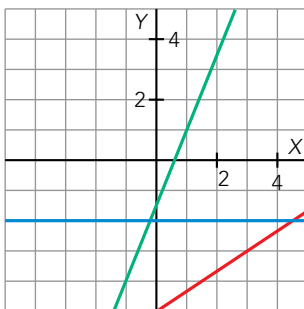
x	$y = \frac{2}{3}x - 5$
0	-5
3	-3
6	-1

e)

x	$y = -2$
-2	-2
0	-2
2	-2

f)

x	$y = \frac{5x - 3}{2}$
-1	-4
0	-3/2
1	1



- d) $y = \frac{2}{3}x - 5$
- e) $y = -2$
- f) $y = \frac{5x - 3}{2}$

- 2. Medimos el grosor de los libros de una colección. Cada una de las cubiertas tiene un grosor de 5 mm. Sabiendo que el grosor de 200 páginas es de 1 cm, escribe la ecuación de la función número de páginas \rightarrow grosor del libro y represéntala en unos ejes.**

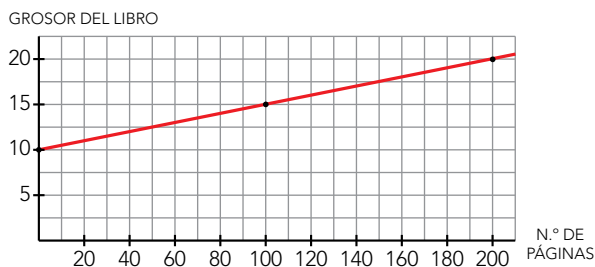
El grosor de las cubiertas es $2 \cdot 5 = 10$ mm.

1 cm = 10 mm

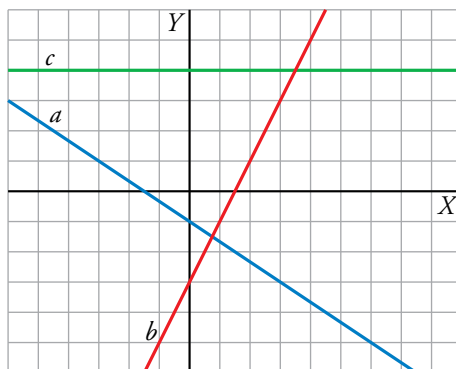
Una página tiene un grosor de $\frac{10}{200} = \frac{1}{20}$ mm.

La función es: $f(x) = \frac{1}{20}x + 10$

x	y = 1/20x + 10
0	10
100	15
200	20



- 3. Escribe la ecuación de cada una de estas rectas:**



Las ecuaciones de las rectas son de la forma $y = mx + n$. Buscamos, para cada una, el punto de corte con el eje Y y otro punto con coordenadas enteras.

- La recta a pasa por $(0, -1)$ y $(3, -3)$:

$$\left. \begin{array}{l} m = -\frac{2}{3} \\ n = -1 \end{array} \right\} \rightarrow y = -\frac{2}{3}x - 1$$

- La recta b pasa por $(0, -3)$ y $(2, 1)$:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{4}{2} = 2 \\ n = -3 \end{array} \right\} \rightarrow y = 2x - 3$$

- La recta c pasa por $(0, 4)$ y $(4, 4)$:

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{0}{4} \\ n = 4 \end{array} \right\} \rightarrow y = 0x + 4 \rightarrow y = 4$$

3 Recta de la que se conocen un punto y la pendiente

Página 167

1. Escribe, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por P y tiene pendiente m :

a) $P(4, -3), m = 4$

b) $P(0, 2), m = -\frac{1}{2}$

c) $P(-3, 1), m = \frac{5}{4}$

d) $P(0, 0), m = -1$

e) $P(-1, 3), m = -\frac{3}{5}$

f) $P(0, -2), m = 0$

La ecuación de una recta en la forma punto pendiente es $y = y_0 + m(x - x_0)$.

a) $y = -3 + 4(x - 4) \rightarrow y = 4x - 19$

b) $y = 2 + \frac{-1}{2}(x - 0) \rightarrow y = 2 - \frac{1}{2}x$

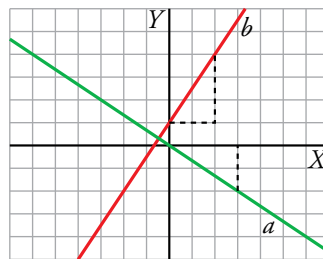
c) $y = 1 + \frac{5}{4}(x + 3) \rightarrow y = \frac{5}{4}x + \frac{19}{4}$

d) $y = 0 - 1(x + 0) \rightarrow y = -x$

e) $y = 3 + \frac{-3}{5}(x + 1) \rightarrow y = \frac{12}{5} - \frac{3}{5}x$

f) $y = -2 + 0(x + 0) \rightarrow y = -2$

2. Escribe la ecuación de las rectas a y b dadas mediante sus gráficas. Escoge de cada una otro punto distinto al que tomaste para escribir la ecuación. Vuelve a escribir una ecuación con este otro punto. Comprueba que se trata de la misma ecuación.



Tomamos dos puntos con coordenadas enteras:

• Recta a :

$$P(0, 0) \text{ y } m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = 0 - \frac{2}{3}(x - 0) \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

En lugar de $P(0, 0)$, tomamos $Q(3, -2)$:

$$Q(3, -2) \text{ y } m = \frac{-2}{3} \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}(x - 3) \rightarrow y = -2 - \frac{2}{3}x + 2 \rightarrow y = -\frac{2}{3}x$$

Obtenemos la misma ecuación.

• Recta b

$$R(0, 1) \text{ y } m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 1 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$$

En lugar de $R(0, 1)$, tomamos $S(2, 4)$:

$$S(2, 4) \text{ y } m = \frac{3}{2} \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}(x - 2) \rightarrow y = 4 + \frac{3}{2}x - 3 \rightarrow y = \frac{3}{2}x + 1$$

Obtenemos la misma ecuación.

4 Recta que pasa por dos puntos

Página 168

1. Halla, en cada caso, la ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q :

- a) $P(2, 5)$, $Q(-3, 6)$ b) $P(3, -4)$, $Q(-2, -1)$ c) $P(-1, 0)$, $Q(5, 5)$
 d) $P(-7, 1)$, $Q(3, 4)$ e) $P(3, 1)$, $Q(-2, 1)$ f) $P(2, -2)$, $Q(2, 5)$

En cada caso, hallamos la pendiente a partir de los puntos dados y, después, usamos la ecuación punto-pendiente para escribir la ecuación de la recta.

a) $m = \frac{6-5}{-3-2} = -\frac{1}{5}$

Recta que pasa por $P(2, 5)$ y tiene pendiente $-\frac{1}{5} \rightarrow y = 5 - \frac{1}{5}(x - 2) \rightarrow y = \frac{27}{5} - \frac{1}{5}x$

b) $m = \frac{-1-(-4)}{-2-3} = -\frac{3}{5}$

Recta que pasa por $P(3, -4)$ y tiene pendiente $-\frac{3}{5} \rightarrow y = -4 - \frac{3}{5}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{11}{5} - \frac{3}{5}x$

c) $m = \frac{5-0}{5-(-1)} = \frac{5}{6}$

Recta que pasa por $P(-1, 0)$ y tiene pendiente $\frac{5}{6} \rightarrow y = 0 + \frac{5}{6}(x + 1) \rightarrow y = \frac{5}{6}x + \frac{5}{6}$

d) $m = \frac{4-1}{3-(-7)} = \frac{3}{10}$

Recta que pasa por $P(-7, 1)$ y tiene pendiente $\frac{3}{10} \rightarrow y = 1 + \frac{3}{10}(x + 7) \rightarrow y = \frac{3}{10}x + \frac{31}{10}$

e) $m = \frac{1-1}{-2-3} = 0$

Recta que pasa por $P(3, 1)$ y tiene pendiente $0 \rightarrow y = 1 - 0(x - 3) \rightarrow y = 1$

f) $m = \frac{5-(-2)}{2-2} = \frac{7}{0} \rightarrow$ Es una recta vertical (pendiente infinita).

La ordenada de cualquier abscisa es 2 $\rightarrow x = 2$.

2. Halla las ecuaciones de las rectas a , b y c . Utiliza los puntos marcados para calcular las pendientes.

- En la recta a :

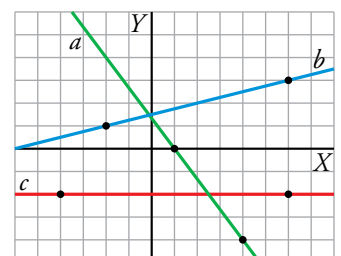
$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{-4}{3} \\ P(1, 0) \end{array} \right\} \rightarrow y = 0 + \left(\frac{-4}{3}\right)(x - 1) \rightarrow y = \frac{4}{3} - \frac{4}{3}x$$

- En la recta b :

$$\left. \begin{array}{l} m = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \\ P(-2, 1) \end{array} \right\} \rightarrow y = 1 + \frac{1}{4}(x + 2) \rightarrow y = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$$

- En la recta c :

$$\left. \begin{array}{l} m = 0 \\ P(-4, -2) \end{array} \right\} \rightarrow y = -2 + 0(x + 4) \rightarrow y = -2$$



5 Aplicaciones de la función lineal. Problemas de movimientos

Página 169

- 1. Un robot va a una velocidad de 7 m por minuto (7 m/min). ¿Qué distancia recorre en t min?**

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

- 2. Un robot marcha a 7 m/min. Lo pusimos en marcha hace 2 min. ¿A qué distancia estará de nosotros dentro de t min?**

Si llamamos d a la distancia que recorre, $d = 7t$.

En 2 minutos recorre $d = 7 \cdot 2 = 14$ m.

Dentro de t min estará a una distancia $d = 14 + 7t$.

- 3. Un robot está a 40 m de nosotros y se nos acerca a 5 m/min. ¿A qué distancia estará dentro de t min?**

Si llamamos d a la distancia que estará de nosotros, $d = 40 - 5t$.

- 4. A las 10:00 alquilamos una bici a 5 €/h y dejamos 100 € de adelanto. ¿Cuánto nos han de devolver si la llevamos de vuelta a las t horas de ese día?**

Si llamamos D al dinero que han de devolvernos, $D = 100 - 5(t - 10)$.

6 Estudio conjunto de dos funciones lineales

Página 170

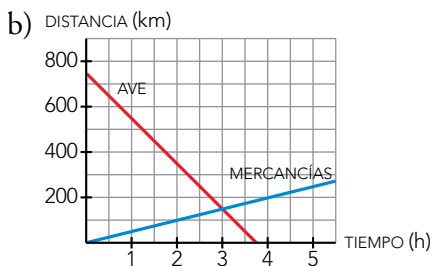
1. Un tren AVE ha salido a las 10 de la mañana de una ciudad situada a 750 km de la nuestra y viene hacia aquí a 200 km/h. Por otro lado, un tren de mercancías salió dos horas antes de nuestra ciudad y va a 50 km/h por un vía paralela a la del AVE.

- Expresa mediante dos funciones la distancia a nuestra ciudad de cada tren al cabo de t horas.
- Representa las dos rectas correspondientes a las funciones en unos ejes de coordenadas.
- Indica en qué punto se cortan las dos rectas y di qué significa cada una de sus coordenadas.
- Calcula mediante un sistema de ecuaciones la hora a la que se cruzan los trenes y a qué distancia de nuestra ciudad se encuentran.

a) Si llamamos d a la distancia que hay desde nuestra ciudad a cada tren al cabo de t horas:

$$d_{\text{AVE}} = 750 - 200t$$

$$d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t$$



c) Se cortan en el punto (3, 150), lo que significa que se cruzarán a las 3 horas, a 150 km de distancia de nuestra ciudad.

$$d) \left. \begin{array}{l} d_{\text{AVE}} = 750 - 200t \\ d_{\text{MERCANCÍAS}} = 50t \end{array} \right\} \rightarrow 750 - 200t = 50t \rightarrow 750 = 250t \rightarrow t = 3 \text{ horas}$$

Para $t = 3$ horas, $d_{\text{AVE}} = d_{\text{MERCANCÍAS}} = 150$ km

Se encuentran a las 3 horas, a 150 km de nuestra ciudad.

7 Parábolas y funciones cuadráticas

Página 171

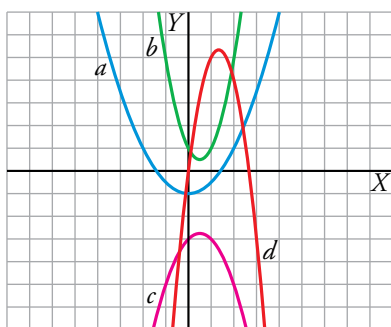
1. Asocia estas expresiones analíticas de funciones cuadráticas con sus correspondientes parábolas representadas a la derecha:

I) $y = 2x^2 - 2x + 1$

II) $y = -x^2 + x - 3$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1$

IV) $y = -3x^2 + 8x$



I) $y = 2x^2 - 2x + 1 \rightarrow b$

II) $y = -x^2 + x - 3 \rightarrow c$

III) $y = \frac{1}{2}x^2 - 1 \rightarrow a$

IV) $y = -3x^2 + 8x \rightarrow d$

Página 172

2. Representa las siguientes parábolas:

a) $y = x^2 - 2x + 3$

b) $y = x^2 - 6x + 5$

Calculamos, para cada caso, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \frac{-(-2)}{2 \cdot 1} = 1$

$x^2 - 2x + 3 = 0 \rightarrow x = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2} \rightarrow$ No tiene soluciones reales.

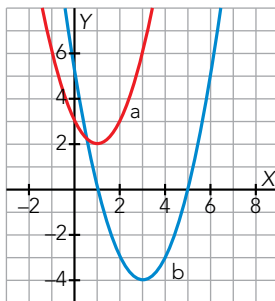
La parábola no corta al eje X .

x	-1	0	1	2	3
y	6	3	2	3	6

b) $p = \frac{-(-6)}{2 \cdot 1} = 3$

$x^2 - 6x + 5 = 0 \rightarrow x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 20}}{2} = \frac{6 \pm 4}{2} \rightarrow \begin{cases} x = 5 \rightarrow (5, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$

x	0	1	2	3	4	5	6
y	5	0	-3	-4	-3	0	5



3. Dibuja estas funciones:

a) $y = \frac{1}{4}x^2 + x - 2$

b) $y = 2x^2 - 10x + 8$

Calculamos, en ambos casos, el vértice, los cortes con los ejes y algún valor cercano al vértice:

a) $p = \frac{-1}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2$

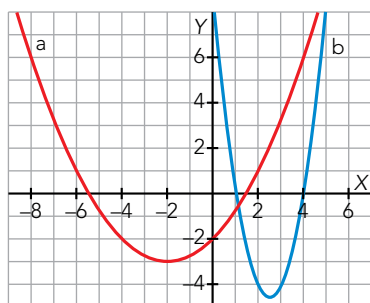
$$\frac{1}{4}x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+2}}{\frac{1}{2}} = -2 \pm 2\sqrt{3} \rightarrow \begin{cases} x = -2 + 2\sqrt{3} \rightarrow (-2 + 2\sqrt{3}, 0) \\ x = -2 - 2\sqrt{3} \rightarrow (-2 - 2\sqrt{3}, 0) \end{cases}$$

x	-6	$-2 - 2\sqrt{3}$	-4	-2	0	$-2 + 2\sqrt{3}$	2
y	1	0	-2	-3	-2	0	1

b) $p = \frac{-(-10)}{2 \cdot 2} = \frac{5}{2}$

$$2x^2 - 10x + 8 = 0 \rightarrow x = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 64}}{4} = \frac{10 \pm 6}{4} \rightarrow \begin{cases} x = 4 \rightarrow (4, 0) \\ x = 1 \rightarrow (1, 0) \end{cases}$$

x	0	1	2	$\frac{5}{2}$	3	4	5
y	8	0	-4	$-\frac{9}{2}$	-4	0	8



Página 173

Hazlo tú

Un ave está a 1 120 m de altura. Se lanza en picado hacia abajo a 20 m/s en el mismo momento que desde el suelo sale hacia arriba una bala a 160 m/s. La ecuación del movimiento de la bala es: $altura = 160t - 5t^2$. ¿En qué momento coinciden?

$$\left. \begin{array}{l} a = 1120 - 20t \\ a = 160t - 5t^2 \end{array} \right\} \rightarrow 1120 - 20t = 160t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 180t + 1120 = 0 \rightarrow$$
$$\rightarrow t^2 - 36t + 224 = 0 \rightarrow t_1 = 8, t_2 = 28$$

Coinciden a los 8 segundos y a los 28.

Ejercicios y problemas

Página 174

Practica

Funciones lineales. Rectas

1.  Representa las rectas siguientes:

a) $y = 4x$

b) $y = -2,4x$

c) $y = -\frac{x}{2}$

d) $y = -2x + 1$

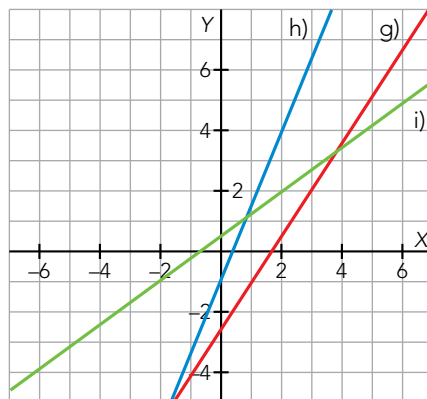
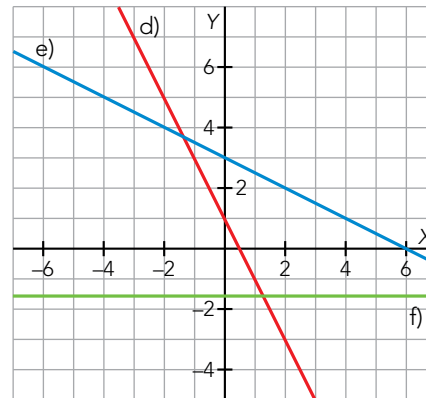
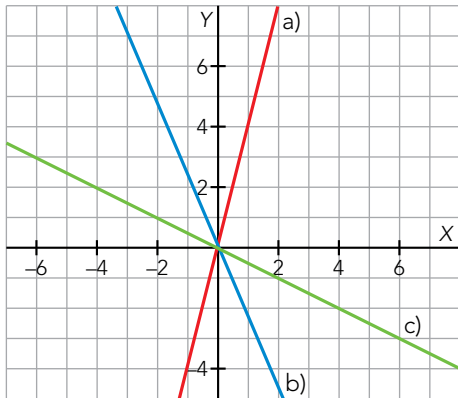
e) $y = -\frac{x}{2} + 3$

f) $y = -\frac{8}{5}$

g) $y = \frac{3x-5}{2}$

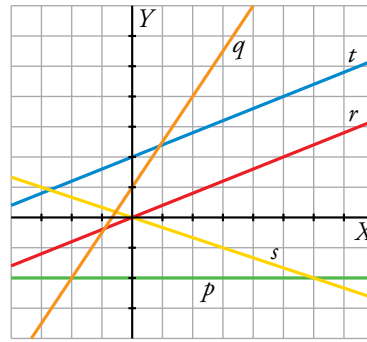
h) $y = 2,5x - 1$

i) $y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$



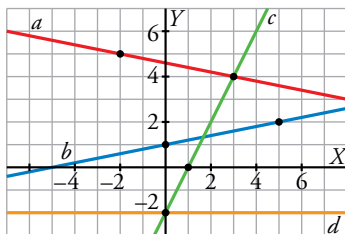
2. ▢ Asocia cada recta con su ecuación:

- a) $y = -\frac{1}{3}x$
- b) $y = \frac{3}{2}x + 1$
- c) $y = \frac{2}{5}x$
- d) $y = \frac{2}{5}x + 2$
- e) $y = -2$



- a) s
- b) q
- c) r
- d) t
- e) p

3. ▢ a) Escribe la ecuación de cada recta:



b) ¿Cuáles son funciones crecientes? ¿Y decrecientes? Comproba el signo de la pendiente en cada caso.

a) Utilizamos los puntos marcados para hallar la pendiente de cada recta.

- La recta a tiene pendiente $m = -\frac{1}{5}$ y pasa por el punto $(3, 4)$.

Su ecuación es $y = 4 - \frac{1}{5}(x - 3)$.

- La recta b tiene pendiente $m = \frac{1}{5}$ y pasa por el punto $(0, 1)$.

Su ecuación es $y = \frac{1}{5}x + 1$.

- La recta c tiene pendiente $m = \frac{4}{2} = 2$ y pasa por $(0, -2)$.

Su ecuación es $y = 2x - 2$.

- La ecuación de la recta d es $y = -2$.

b) Las funciones b y c son crecientes, y tienen pendiente positiva.

La función a es decreciente, y tiene pendiente negativa.

La función d es constante, y su pendiente es 0.

4. ▢ Escribe la ecuación de la recta de la que conocemos un punto y la pendiente, en cada caso:

a) $P(-2, 5), m = 3$

b) $P(0, -5), m = -2$

c) $P(0, 0), m = \frac{3}{2}$

d) $P(-2, -4), m = -\frac{3}{2}$

a) $y = 5 + 3(x + 2)$

b) $y = -5 - 2(x - 0) \rightarrow y = -2x - 5$

c) $y = 0 + \frac{3}{2}(x - 0) \rightarrow y = \frac{3}{2}x$

d) $y = -4 - \frac{2}{3}(x + 2)$

5. Obtén la ecuación de la recta que pasa por A y B .

a) $A(2, -1), B(3, 4)$

b) $A(-5, 2), B(-3, 1)$

c) $A\left(\frac{3}{2}, 2\right), B\left(1, \frac{2}{3}\right)$

d) $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), B\left(\frac{1}{3}, 1\right)$

a) $m = \frac{4 - (-1)}{3 - 2} = 5$

b) $m = \frac{1 - 2}{-3 - (-5)} = \frac{-1}{2}$

$y = -1 + 5(x - 2)$

$y = 2 - \frac{1}{2}(x + 5)$

c) $m = \frac{\frac{2}{3} - 2}{1 - \frac{3}{2}} = \frac{\frac{-4}{3}}{\frac{-1}{2}} = \frac{8}{3}$

d) $m = \frac{1 - \frac{3}{4}}{\frac{1}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{5}{6}} = \frac{3}{10}$

$y = 2 + \frac{8}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)$

$y = \frac{3}{4} + \frac{3}{10}\left(x + \frac{1}{2}\right)$

6. Di la pendiente de estas rectas y represéntalas en los mismos ejes. ¿Qué conclusión sacas?

a) $y = 2x$

b) $y = 2x - 3$

c) $2x - y + 1 = 0$

d) $4x - 2y + 5 = 0$

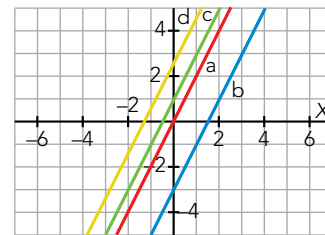
Las pendientes de las rectas son:

a) $m = 2$

b) $m = 2$

c) $2x - y + 1 = 0 \rightarrow y = 2x + 1 \rightarrow m = 2$

d) $4x - 2y + 5 = 0 \rightarrow y = 2x + \frac{5}{2} \rightarrow m = 2$



Las cuatro rectas son paralelas. Las rectas paralelas tienen la misma pendiente.

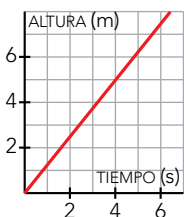
7. La altura del agua de un depósito varía con el tiempo según la función $a = (5/4)t$ (a en metros, t en segundos).

a) Representála. Si la altura del depósito es 5 m, ¿cuál es el dominio de definición de la función?

b) ¿Es una función de proporcionalidad?

c) Di cuál es la pendiente y explica su significado.

a) $a(t) = \frac{5}{4}t$. Es una función lineal de pendiente $\frac{5}{4}$. Pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(4, 5)$.



Si la altura es 5 m, el dominio de la función es el tramo 0 - 4.

b) Sí, se trata de una función de proporcionalidad.

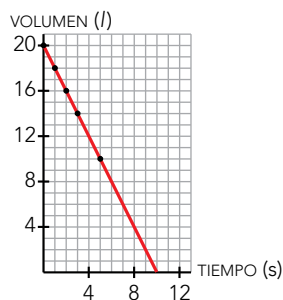
c) La pendiente es $\frac{5}{4}$. Significa que por cada cuatro segundos que pasen, la altura del depósito aumenta 5 metros.

8.  Esta tabla muestra cómo varía el volumen de agua que hay en un depósito al abrir un desagüe:

t (min)	0	1	2	3	5
V (l)	20	18	16	14	10

- Representa la función *tiempo* \rightarrow *volumen*.
- Escribe su ecuación y su dominio de definición.
- Di cuál es su pendiente y qué significa.
- ¿Es una función de proporcionalidad?


a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



- b) La pendiente de la función es $m = \frac{-2}{1} = -2$ y su ordenada en el origen es $n = 20$.

La ecuación de la función es $y = -2x + 20$. Su dominio de definición es el tramo 0 - 10.

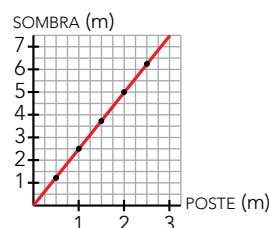
- La pendiente es $m = -2$ y significa que por cada minuto que está el desagüe abierto, el volumen de agua que hay en el depósito disminuye 2 litros.
- No, no es una función de proporcionalidad. Es una función afín.

9.  Esta tabla muestra las longitudes de unos postes y de sus sombras en un momento determinado:

POSTE (m)	0,5	1	1,5	2	2,5
SOMBRA (m)	1,25	2,5	3,75	5	6,25

- Representa la función *longitud del poste* \rightarrow *longitud de la sombra*.
- Escribe su ecuación y di cuál es la pendiente.
- ¿Qué longitud tendrá la sombra de un poste de 3,5 m?
- ¿Qué longitud tiene un poste que arroja una sombra de 3 m?


a) Representamos los pares de puntos que se muestran en la tabla:



- b) La pendiente de la función es $m = \frac{5}{2}$ y pasa por el origen de coordenadas. La ecuación de la función es $y = \frac{5}{2}x$.

c) $y = \frac{5}{2} \cdot 3,5 = 8,75 \rightarrow 8,75 \text{ m}$

d) $3 = \frac{5}{2}x \rightarrow x = \frac{6}{5} \rightarrow x = 1,2 \rightarrow 1,2 \text{ m}$

10.  Una milla equivale, aproximadamente, a 1,6 km.

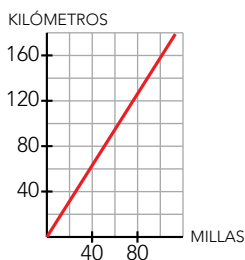
a) Haz una tabla para convertir millas en kilómetros.


b) Dibuja la gráfica y escribe su ecuación.

a)

MILLAS	1	2	3	4	5	10	20	50	100
KILÓMETROS	1,6	3,2	4,8	6,4	8	16	32	80	160

b) La ecuación es $y = 1,6x$



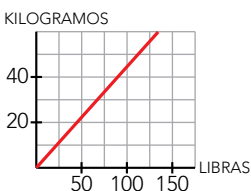
11.  Sabiendo que 100 libras equivalen a 45 kg:


a) Escribe la ecuación que determina el número de kilos, y , que equivalen a x libras.

b) Dibuja la gráfica de la función.

a) x : libras; y : kilos $\rightarrow y = \frac{45}{100}x$

b) La gráfica pasa por $(0, 0)$ y por $(100, 45)$

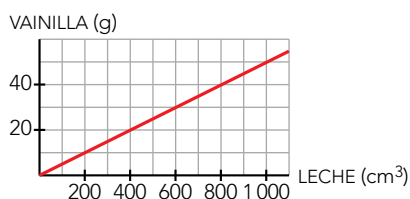


12.  Una receta para hacer helados recomienda poner 10 g de vainilla por cada 200 cm³ de leche. Encuentra la relación entre la cantidad de leche y de vainilla, y representa la función.


Son 10 g de vainilla por cada 200 cm³ de leche.

La función que da la relación entre la cantidad de leche, x , y de vainilla, y , es:

$y = \frac{10}{200}x \rightarrow y = 0,05x$



Página 175

13.  Mamen anda a una velocidad de 3 km/h y su casa se encuentra a 10 km de la piscina. Asocia cada uno de estos enunciados con una de las ecuaciones de más abajo:

- a) Si empieza a andar ahora, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?
- b) Si empezó a andar hace 3 h, ¿qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?
- c) Si sale de su casa para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de t horas?
- d) Si salió desde su casa a las 10:00 h para bañarse, ¿a qué distancia se encontrará de la piscina a las t horas?
- e) Si salió desde su casa hace 3 horas para bañarse, ¿a qué distancia estará de la piscina dentro de t horas?

$d = 3t + 3$

$d = 10 + 3(t - 10)$

$d = 3(t + 3)$

$d = 3(t - 3)$

$d = 10 - 3(t - 10)$

$d = 10 - 3t$

$d = 3t$

$d = 10 - 3(t + 3)$

$d = 10 + 3(t + 3)$

a) $d = 3t$

b) $d = 3(t + 3)$

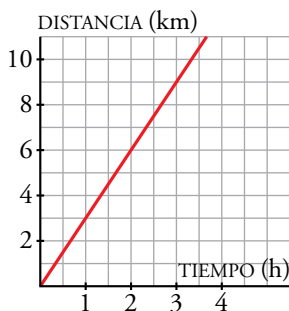
c) $d = 10 - 3t$

d) $d = 10 - 3(t - 10)$

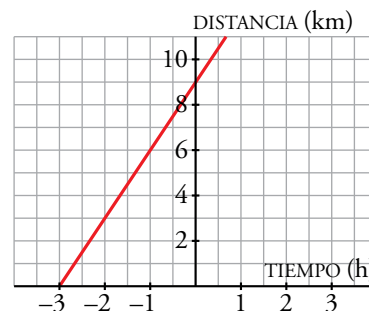
e) $d = 10 - 3(t + 3)$

14.  Dibuja la gráfica de cada uno de los enunciados del ejercicio anterior.

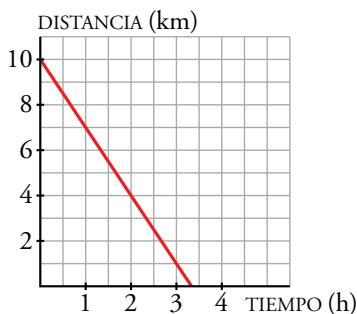
a) $d = 3t$



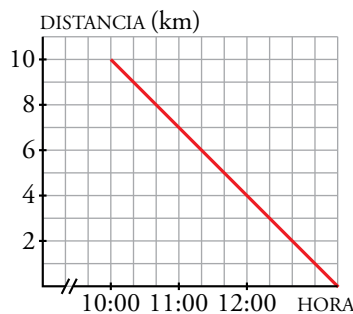
b) $d = 3(t + 3) \rightarrow d = 3t + 9$



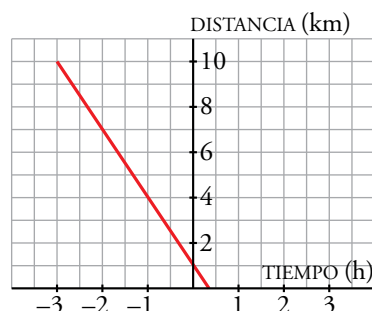
c) $d = 10 - 3t$



d) $d = 10 - 3(t - 10) \rightarrow d = -3t + 40$



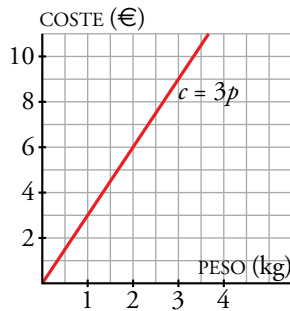
e) $d = 10 - 3(t + 3) \rightarrow d = -3t + 1$



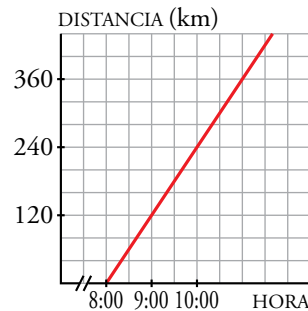
15. En cada uno de los siguientes enunciados, halla la ecuación y representa la función lineal en unos ejes coordenados:

- a) Antonio compra naranjas a 3 €/kg. ¿Cuánto le costarán p kg de naranjas?
- b) Sonia sale de viaje a las 8:00 h a 120 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido a las t horas?
- c) A Juan le cobran 5 € por alquilar unos patines, más 1 € por cada hora que esté patinando. ¿Cuánto le cobrarán por t horas de patinaje?
- d) Tengo 25 € y el taxi me ha cobrado 2,50 € por la bajada de bandera más 1,20 € por kilómetro recorrido. ¿Cuánto dinero me quedará si el taxi me lleva a d km de distancia?
- e) A las 12:00 he sacado un refresco a 10 °C de la nevera. Si cada minuto se calienta 1,5 °C, ¿a qué temperatura estará a las t horas?
- f) Hace 10 min he abierto el grifo que llena la bañera. Si el nivel sube a razón de 2 cm de altura por minuto y la bañera tiene 40 cm de profundidad, ¿cuántos centímetros faltarán para que rebose el agua dentro de t minutos?

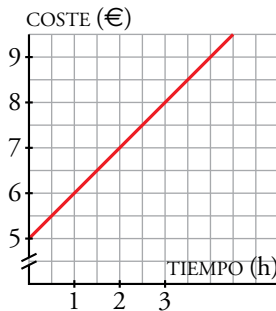
a) $c = 3p$



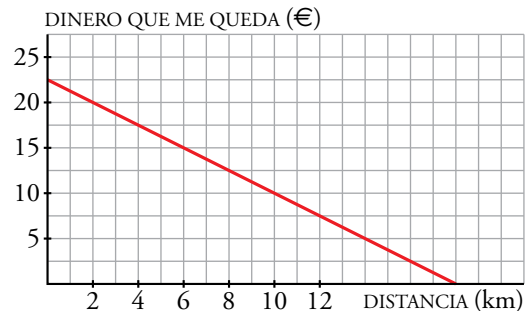
b) $d = 120(t - 8) \rightarrow d = 120t - 960$



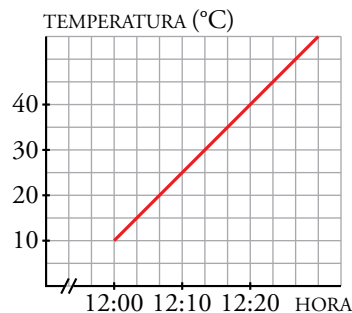
c) $c = 5 + t$



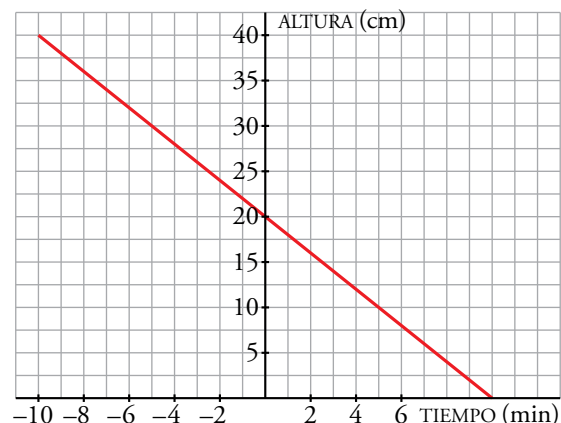
d) $D = 25 - (2,50 + 1,20d) \rightarrow D = -1,2d + 22,5$



e) $g = 10 + 1,5 \cdot 60(t - 12) \rightarrow$
 $\rightarrow g = 10 + 90t - 1080 \rightarrow g = 90t - 1070$



f) $n = 40 - 2(t + 10) \rightarrow n = 40 - 2t - 20 \rightarrow$
 $\rightarrow n = -2t + 20$



Funciones cuadráticas. Parábolas

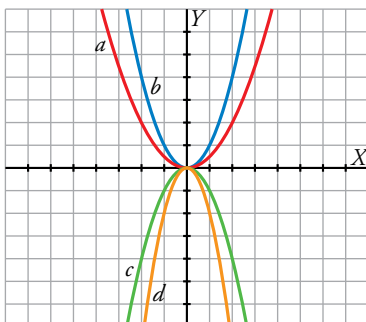
16.  Asocia cada función cuadrática con su correspondiente gráfica:

I) $y = x^2$

II) $y = -x^2$

III) $y = -2x^2$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2$



I) b

II) c

III) d

IV) a

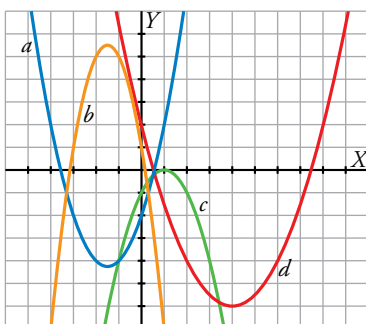
17.  Asocia cada ecuación con su correspondiente parábola:

I) $y = x^2 + 3x - 2$

II) $y = -x^2 + 2x - 1$

III) $y = -2x^2 - 6x + 1$

IV) $y = \frac{1}{2}x^2 - 4x + 2$



I) a

II) c

III) b

IV) d

18.  Representa las siguientes funciones haciendo, en cada caso, una tabla de valores como esta, y di cuál es el vértice de cada parábola:

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y

a) $y = x^2 + 3$

b) $y = x^2 - 4$

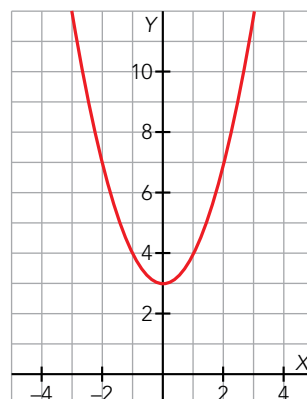
c) $y = 2x^2$

d) $y = 0,5x^2$

a) $y = x^2 + 3$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	19	12	7	4	3	4	7	12	19

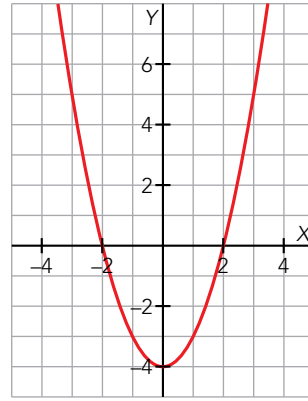
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es (0, 3).



b) $y = x^2 - 4$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	12	5	0	-3	-4	-3	0	5	12

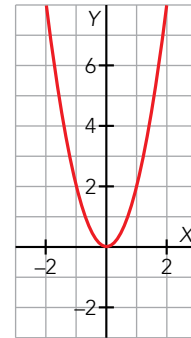
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{2} = 0 \rightarrow$ El vértice es $(0, -4)$.



c) $y = 2x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	32	18	8	2	0	2	8	18	32

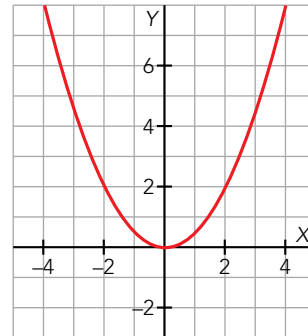
La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{4} = 0 \rightarrow$ El vértice es $(0, 0)$



d) $y = 0,5x^2$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
y	8	4,5	2	0,5	0	0,5	2	4,5	8

La abscisa del vértice es $p = \frac{0}{1} = 0 \rightarrow$ El vértice es $(0, 0)$



19. Di cuál es el punto (abscisa y ordenada) donde se encuentra el vértice de las siguientes parábolas, señalando, en cada caso, si se trata de un máximo o un mínimo:

a) $y = x^2 - 5$

b) $y = 3 - x^2$

c) $y = -2x^2 - 4x + 3$

d) $y = 5x^2 + 20x + 20$

e) $y = -\frac{5}{2}x^2 + 5x - \frac{3}{2}$

a) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{2} = 0$; $f(0) = -5$; $V(0, -5)$. Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

b) $p = -\frac{b}{2a} = \frac{0}{-2} = 0$; $f(0) = 3$; $V(0, 3)$. Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

c) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot (-2)} = -1$; $f(-1) = 5$; $V(-1, 5)$. Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

d) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{20}{2 \cdot 5} = -2$; $f(-2) = 0$; $V(-2, 0)$. Es un mínimo, ya que el coeficiente de x^2 es positivo.

e) $p = -\frac{b}{2a} = -\frac{5}{2 \cdot \frac{-5}{2}} = 1$; $f(1) = 1$; $V(1, 1)$. Es un máximo, ya que el coeficiente de x^2 es negativo.

20. Representa las siguientes parábolas, hallando el vértice, algunos puntos próximos a él y los puntos de corte con los ejes:

a) $y = (x + 4)^2$ b) $y = \frac{1}{3}x^2 + 2x$ c) $y = -3x^2 + 6x - 3$ d) $y = -x^2 + 5$

a) Desarrollamos la expresión: $y = (x + 4)^2 \rightarrow y = x^2 + 8x + 16$

Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-8}{2} = -4$

Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 + 0 + 16 \rightarrow (0, 16)$

$y = 0 \rightarrow (x + 4)^2 = 0 \rightarrow x = -4 \rightarrow (-4, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	-7	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0
y	9	4	1	0	1	4	9	16



b) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-2}{2 \cdot \frac{1}{3}} = -3$

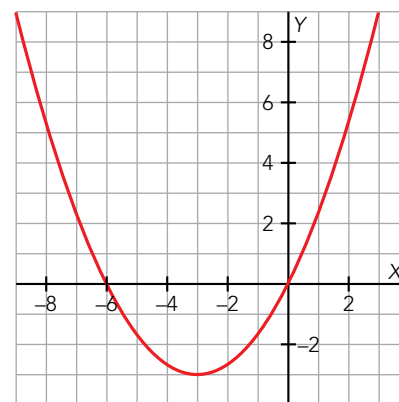
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = 0 \rightarrow (0, 0)$

$y = 0 \rightarrow \frac{1}{3}x^2 + 2x = 0 \rightarrow x\left(\frac{1}{3}x + 2\right) = 0 \rightarrow \begin{cases} x = 0 \rightarrow (0, 0) \\ x = -6 \rightarrow (-6, 0) \end{cases}$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	-9	-6	-4	-3	-2	0	3
y	9	0	-2,667	-3	-2,667	0	9



c) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{-6}{2 \cdot (-3)} = 1$

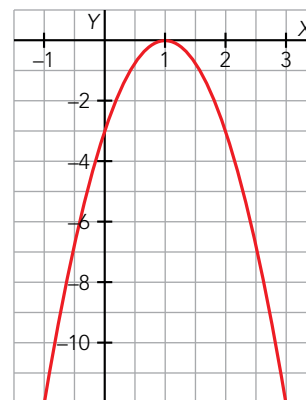
Calculamos los cortes con los ejes:

$x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow (0, -3)$

$y = 0 \rightarrow -3x^2 + 6x - 3 = 0 \rightarrow -3(x - 1)^2 = 0 \rightarrow x = 1 \rightarrow (1, 0)$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	-1	0	1	2	3
y	-12	-3	0	-3	-12



d) Calculamos la abscisa del vértice: $p = \frac{0}{2 \cdot (-1)} = 0$

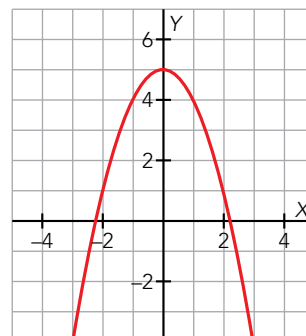
Calculamos los cortes con los ejes:

$$x = 0 \rightarrow y = 5 \rightarrow (0, 5)$$


$$y = 0 \rightarrow -x^2 + 5 = 0 \rightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{5} \rightarrow (-\sqrt{5}, 0) \\ x = \sqrt{5} \rightarrow (\sqrt{5}, 0) \end{cases}$$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	-3	$-\sqrt{5}$	-2	-1	0	1	2	$\sqrt{5}$	3
y	-4	0	1	4	5	4	1	0	-4



Aplica lo aprendido

- 21.**  a) Calcula c para que la recta $3x - 5y = c$ pase por el punto $(-2, 4)$.
- b) Calcula b para que la recta $2x + by = -11$ pase por el punto $(2, -5)$.
- c) Halla k para que la parábola $y = kx^2 - 2x + 3$ pase por el punto $(-1, 0)$.
- d) Halla el valor de a para que la parábola de ecuación $y = ax^2 + 2x + 3$ tenga su vértice en el punto de abscisa $x = 2$.
- e) Calcula el valor del parámetro m para que la recta $y = mx + 2$ y la parábola $y = x^2 - 3x + 2$ tengan un solo punto de corte.
- a) El punto $(-2, 4)$ tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$$3 \cdot (-2) - 5 \cdot 4 = c \rightarrow c = -26$$
- b) El punto $(2, -5)$ tiene que verificar la ecuación de la recta. Por tanto:

$$2 \cdot 2 + b \cdot (-5) = -11 \rightarrow b = 3$$
- c) Sustituimos el punto en la parábola, para hacer que cumpla la ecuación, y despejamos k :


$$k + 2 + 3 = 0 \rightarrow k = -5$$
- d) Sustituimos el punto en la ecuación del vértice para hallar el coeficiente a :

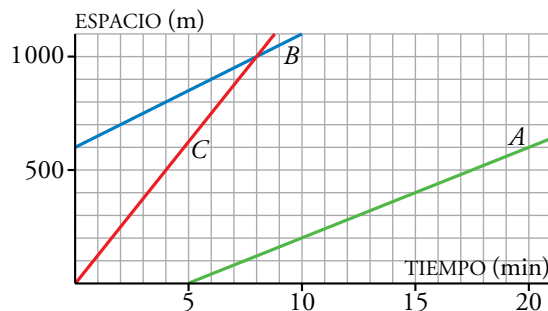
$$p = -\frac{2}{2a} = 2 \rightarrow a = \frac{-1}{2}$$
- e) Resolvemos el sistema por igualación de ambas ecuaciones para que exista ese punto de corte entre ambas:

$$mx + 2 = x^2 - 3x + 2 \rightarrow x^2 - 3x - mx = 0 \rightarrow x(x - 3 - m) = 0 \rightarrow x = 0 \text{ y } x = m + 3$$

 Para que solo haya un único punto de corte la segunda solución debe dar 0:

$$m + 3 = 0 \rightarrow m = -3$$

- 22.**  Esta es la gráfica del espacio que recorren tres montañeros que van a velocidad constante:




- a) ¿Qué velocidad, en m/min, lleva cada uno?
- b) Escribe la expresión analítica de estas funciones.
- a) La velocidad se corresponde con la pendiente de cada función.
- A lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min
- B lleva una velocidad de $\frac{100}{3} \approx 33,3$ m/min
- C lleva una velocidad de $\frac{400}{3} \approx 133,3$ m/min

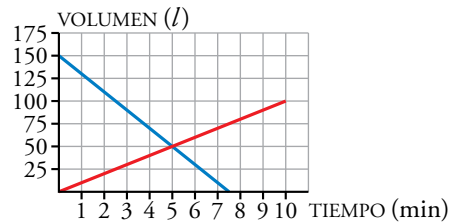
$$b) A \rightarrow y = 500 + \frac{100}{3}(x - 20)$$

$$B \rightarrow y = \frac{100}{3}x + 500$$

$$C \rightarrow y = \frac{400}{3}x$$

- 23.**  Dos depósitos de agua, A y B, funcionan de la forma siguiente: a medida que A se vacía, B se va llenando.

Estas son las gráficas:



a) Indica cuál es la gráfica de A, cuál la de B y escribe sus ecuaciones.

b) ¿Cuáles son las velocidades de entrada y de salida del agua?

c) ¿En qué momento los dos depósitos tienen igual cantidad de agua?

a) Como A se vacía, su gráfica debe ser decreciente y como B se llena, su gráfica debe ser creciente. Por lo tanto, la gráfica azul corresponde al depósito A y la roja, al B.


Ecuación de A: $y = -20x + 150$

Ecuación de B: $y = 10x$

b) El agua sale a una velocidad de 20 l/min y entra a 10 l/min.

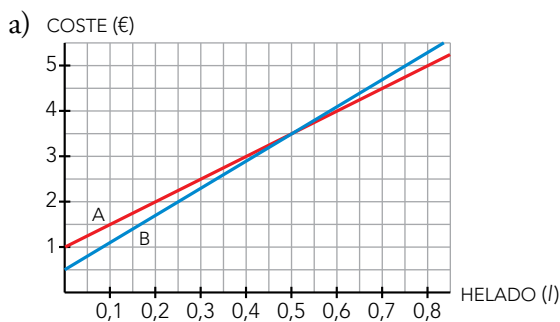
c) En el minuto 5.

Resuelve problemas

- 24.**  En una heladería A venden el helado a 5 € el litro, y cobran 1 € por un envase, sea del tamaño que sea. En otra heladería B cobran 0,50 € por un envase y 6 € por cada litro de helado.

a) Representa la función *litros de helado - coste* para cada heladería y escribe sus ecuaciones.

b) Analiza cuál de las dos ofertas es más ventajosa según la cantidad de helado que compramos.



Si y es el coste del helado, en euros, y x es la cantidad de helado, en litros:

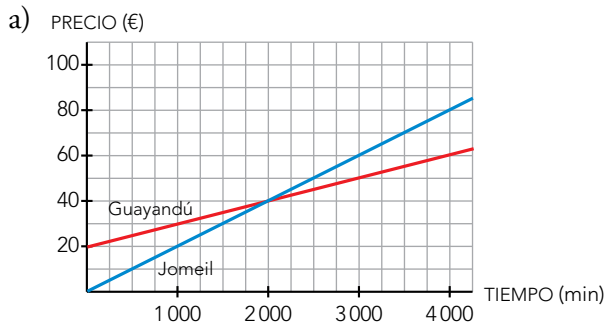
Heladería A $\rightarrow y = 1 + 5x$

Heladería B $\rightarrow y = 0,5 + 6x$

b) Si compramos menos de medio litro de helado, es más barato comprar en la heladería B. Si compramos más de medio litro, la heladería A es la mejor opción.

25. El servidor de Internet GUAYANDÚ tiene la tarifa GUAY, con cuota fija mensual de 20 € y 0,01 € cada minuto. El servidor JOMEIL tiene la tarifa CHUPY, sin cuota fija y 0,02 € por minuto.

- a) Haz una gráfica de cada tarifa en función del tiempo y escribe sus expresiones analíticas.
b) ¿A partir de cuántos minutos mensuales es más rentable GUAY que CHUPY?

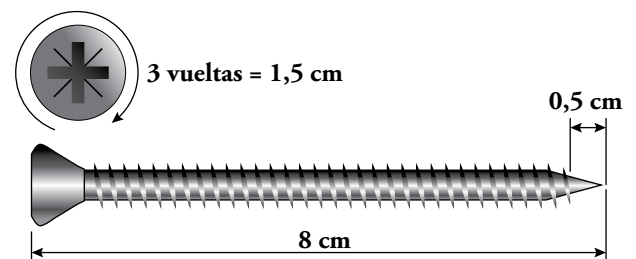


Guayandú $\rightarrow y = 20 + 0,01x$

Jomeil $\rightarrow y = 0,02x$

- b) La tarifa GUAY es más rentable que la tarifa CHUPY a partir de 2000 minutos.

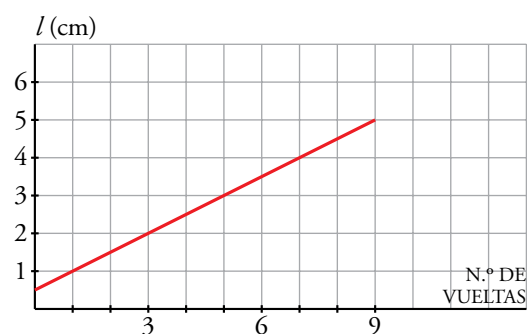
26. Este tornillo penetra 1,5 cm por cada tres vueltas que se le hace girar. Para colocarlo en una viga de madera, se le ha dado, previamente, un martillazo, con el que ha penetrado 0,5 cm.



- a) Haz una tabla que relacione el número de vueltas que se le da al tornillo, x , con la longitud que penetra, y . Construye la gráfica de dicha relación.
b) ¿Cuál es la expresión analítica? ¿Cuál es el paso de rosca del tornillo (longitud que penetra por cada vuelta)? ¿Cuántas vueltas habrá que darle hasta que todo el tornillo esté hundido en la viga?
c) Supongamos que se ha seguido el mismo procedimiento para atravesar un listón de 5 cm de grosor. ¿Después de cuántas vueltas empezará el tornillo a asomar por el otro lado del listón?

a)

N.º DE VUELTAS (x)	0	3	6	9
LONGITUD QUE ENTRA (y)	0,5	2	3,5	5




b) $y = 0,5 + 0,5x \rightarrow$ En cada vuelta penetra 0,5 cm.

Estará totalmente hundido para un número de vueltas x tal que:

$$7,5 = 0,5 + 0,5x \rightarrow x = 14 \text{ vueltas}$$

c) Después del martillazo quedan 4,5 cm de grosor por recorrer. Por tanto:

$$4,5 = 0,5 + 0,5x \rightarrow x = 8 \text{ vueltas}$$

27.  La temperatura de fusión del hielo en la escala centígrada es 0 °C, y en la Fahrenheit es 32 °F. La ebullición del agua es 100 °C, que equivale a 212 °F.

a) Encuentra y representa la función lineal que nos da la relación entre las dos escalas.

b) Expresa en grados Fahrenheit las temperaturas siguientes: 25 °C; 36,5 °C; 10 °C.

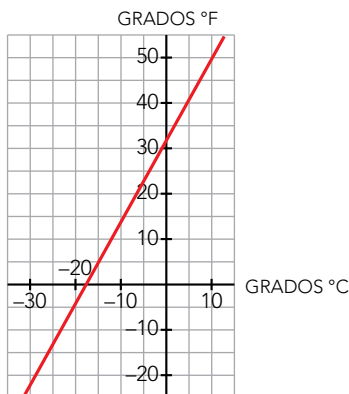
c) Pasa a grados centígrados 86 °F y 63,5 °F.

GRADOS °C	0	100
GRADOS °F	32	212

a) La pendiente de la función es $m = \frac{212 - 32}{100 - 0} = 1,8$

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y = 32 + 1,8(x - 0) \rightarrow y = 1,8x + 32$$



b) $y = 1,8 \cdot 25 + 32 = 77$ °F; 25 °C \Leftrightarrow 77 °F


$$y = 1,8 \cdot 36,5 + 32 = 97,7$$
 °F; 36,5 °C \Leftrightarrow 97,7 °F

$$y = 1,8 \cdot 10 + 32 = 50$$
 °F; 10 °C \Leftrightarrow 50 °F

c) $86 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \frac{86 - 32}{1,8} = 30$ °C; 86 °F \Leftrightarrow 30 °C

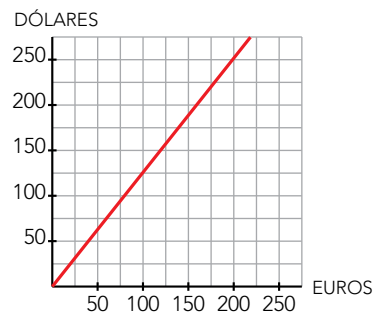
$$63,5 = 1,8x + 32 \rightarrow x = \frac{63,5 - 32}{1,8} = 17,5$$
 °C; 63,5 °F \Leftrightarrow 17,5 °C

Página 177

28.  Israel y Susana, para un viaje a Estados Unidos, han ido a cambiar euros por dólares. A Susana le han cambiado 189 dólares por 150 euros y a Israel le han cambiado 151,20 dólares por 120 euros.

- a) Halla la ecuación de la función que nos permite obtener cuántos dólares recibimos según los euros que entreguemos.
- b) ¿Cuántos dólares nos darían por 200 €? ¿Y por 350 €? ¿Cuántos euros tendríamos si nos hubieran dado 220,50 dólares?

EUROS (€)	150	120
DÓLARES (\$)	189	151,20




a) La pendiente de la función es $m = \frac{151,20 - 189}{120 - 150} = \frac{-37,8}{-30} = \frac{63}{50}$

Tomamos $P(150, 189)$.

La ecuación de la recta en la forma punto-pendiente es:

$$y = 189 + \frac{63}{50}(x - 150) \rightarrow y = \frac{63}{50}x$$

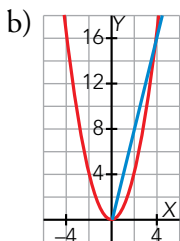
b) $y = \frac{63}{50} \cdot 200 \rightarrow y = 252 \$$ $y = \frac{63}{50} \cdot 350 \rightarrow y = 441 \$$ $220,5 = \frac{63}{50} \cdot x \rightarrow x = 175 €$


29.  a) ¿Cuál es la ecuación de la función que nos da el perímetro de un cuadrado dependiendo de cuánto mida su lado? ¿Y la que nos da su área?

b) Dibuja ambas funciones.

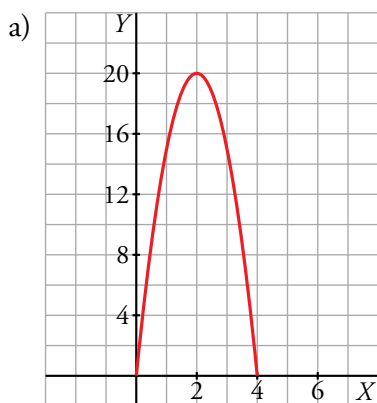
a) El perímetro, y , en función del lado, x , viene dado por $y = 4x$.

El área en función del lado viene dada por $y = x^2$



30.  La altura, a , a la que se encuentra en cada instante, t , una piedra que lanzamos verticalmente hacia arriba es $a = 20t - 5t^2$.

- a) Representa gráficamente la función.
- b) Di cuál es el dominio de definición.
- c) ¿En qué momento alcanza la altura máxima? ¿Cuál es esa altura?
- d) ¿En qué momento toca la piedra el suelo?
- e) ¿En qué intervalo de tiempo la piedra está a una altura superior a 15 metros?



- b) El dominio de definición es el intervalo 0-4, incluyendo los extremos.
- c) Alcanza su altura máxima a los 2 s de ser lanzada, llegando a los 20 m de altura.
- d) Toca el suelo a los 4 s de haber sido lanzada.
- e) En el intervalo 1-3, sin tener en cuenta los extremos, ya que se pide una altura superior, no igual.

31. Representa las siguientes funciones lineal y cuadrática, respectivamente, y halla gráficamente los puntos de corte. Calcula luego, mediante un sistema de ecuaciones, dichos puntos y comprueba que coinciden.

$$y = -2x + 1 \qquad y = x^2 - 3x - 5$$

- $y = x^2 - 3x - 5$

Calculamos la abscisa del vértice, $p = \frac{-(-3)}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$

Calculamos los cortes con los ejes:

$$x = 0 \rightarrow y = -5 \rightarrow (0, -5)$$

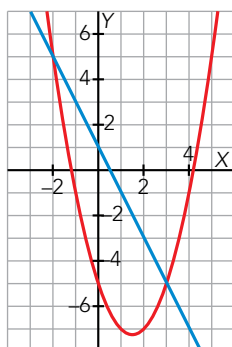
$$y = 0 \rightarrow x^2 - 3x - 5 = 0 \rightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9+20}}{2} = \begin{cases} x = \frac{3 - \sqrt{29}}{2} \approx -1,19 \rightarrow \left(\frac{3 - \sqrt{29}}{2}, 0\right) \\ x = \frac{3 + \sqrt{29}}{2} \approx 4,19 \rightarrow \left(\frac{3 + \sqrt{29}}{2}, 0\right) \end{cases}$$

Tomamos valores alrededor del vértice:

x	-2	$\frac{3 - \sqrt{29}}{2}$	-1	0	1	1,5	3	4	$\frac{3 + \sqrt{29}}{2}$	5
y	5	0	-1	-5	-7	-7,25	-5	-1	0	5

- $y = -2x + 1$ es una función afín con pendiente $m = -2$ y ordenada en el origen $n = 1$.

Representamos las funciones:



Vemos que se cortan en los puntos $(-2, 5)$ y $(3, -5)$.

Comprobémoslo de forma analítica:

$$\left. \begin{array}{l} y = x^2 - 3x - 5 \\ y = -2x + 1 \end{array} \right\} \rightarrow x^2 - 3x - 5 = -2x + 1 \rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 24}}{2} \rightarrow \begin{cases} x = -2 \rightarrow y = 5 \\ x = 3 \rightarrow y = -5 \end{cases}$$

Vemos que obtenemos los mismos puntos de intersección.

- 32.**  Los gastos anuales, en euros, que una empresa tiene por la fabricación de x ordenadores vienen dados por esta expresión:

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

Y los ingresos, también en euros, que se obtienen por las ventas son:

$$I(x) = 600x - 0,1x^2$$

¿Cuántos ordenadores deben fabricarse para que los ingresos superen a los gastos; es decir, para que haya beneficios?

$$G(x) = 20\,000 + 250x$$

$$I(x) = 600x - 0,1x^2$$

Veamos los puntos de corte de ambas funciones:

$$20\,000 + 250x = 600x - 0,1x^2 \rightarrow 0,1x^2 - 350x + 20\,000 = 0$$


$$x = \frac{350 \pm \sqrt{122\,500 - 8\,000}}{0,2} = \frac{350 \pm 338,38}{0,2} \rightarrow \begin{cases} x = 58,1 \\ x = 3\,441,9 \end{cases}$$

Ahora comprobemos en qué tramos los ingresos están por encima de los gastos:

- Si $x < 58,1 \rightarrow G(x) > I(x)$
- Si $58,1 < x < 3\,441,9 \rightarrow G(x) < I(x)$
- Si $x > 3\,441,9 \rightarrow G(x) > I(x)$

Para que los ingresos superen a los gastos, es decir, para que haya beneficios, deben fabricarse entre 59 y 3 441 ordenadores.

Problemas “+”

- 33.**  Se ha soltado un globo de helio que sube a una velocidad constante de 5 m/s. A los 30 s, se lanza una flecha verticalmente hacia arriba cuya altura, a , con respecto al tiempo, t , viene dada por la ecuación $a = 60t - 5t^2$.

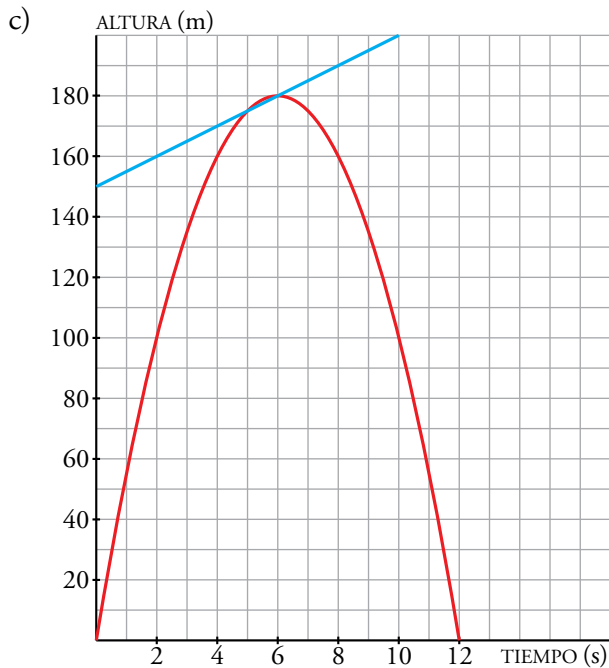
- a) ¿A qué altura pincha la flecha al globo? ¿Cuánto tiempo pasó desde que se lanzó la flecha?
- b) Si la flecha no hubiera pinchado el globo cuando subía, ¿a qué altura lo pincharía al bajar?
- c) Dibuja las gráficas correspondientes a las alturas de la flecha y el globo. Toma como origen del tiempo el momento en que se lanza la flecha.

$$\text{a) } \left. \begin{array}{l} a = 5(t + 30) \\ a = 60t - 5t^2 \end{array} \right\} 5(t + 30) = 60t - 5t^2 \rightarrow 5t^2 - 55t + 150 = 0 \rightarrow t_1 = 5, t_2 = 6$$

$$a = 60 \cdot 5 - 5 \cdot 5^2 = 175$$

La flecha pinchará el globo a 175 metros, a los 5 segundos de ser lanzada.

b) $a = 60 \cdot 6 - 5 \cdot 6^2 = 180$. Lo pincharía a los 180 metros de altura.



34. ■ Tenemos 200 kg de naranjas que hoy se venderían a 0,40 €/kg. Cada día que pasa se estropea 1 kg y el precio aumenta 0,01 €/kg. ¿Cuándo hemos de vender las naranjas para obtener el máximo beneficio? ¿Cuál será ese beneficio?

Si llamamos x a los días que han de pasar, la función que nos da el precio de las naranjas es la siguiente:

$$f(x) = (200 - x)(0,40 + 0,01x) \rightarrow f(x) = -0,1x^2 + 1,60x + 80$$

El beneficio máximo se encontrará en el vértice de la parábola:

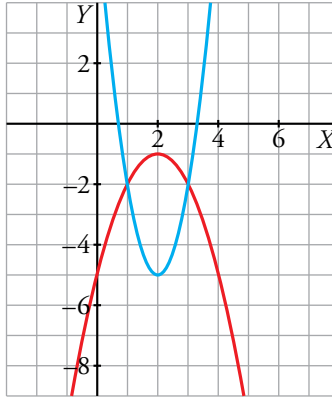
$$p = \frac{-b}{2a} = \frac{-1,60}{2 \cdot (-0,01)} = 80 \rightarrow f(80) = 144$$

Para obtener el máximo beneficio, las naranjas se deberán vender, tras 80 días, por 144 €.

35.  Dibuja las parábolas cuyas ecuaciones son:

$$y = 3x^2 - 12x + 7 \qquad y = -x^2 + 4x - 5$$

Busca los puntos de corte mediante un sistema de ecuaciones y comprueba que corresponden a los hallados gráficamente.



$$\left. \begin{array}{l} y = 3x^2 - 12x + 7 \\ y = -x^2 + 4x - 5 \end{array} \right\} 3x^2 - 12x + 7 = -x^2 + 4x - 5 \rightarrow 4x^2 - 16x + 12 = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \begin{cases} x = 1 \rightarrow y = -2 \\ x = 3 \rightarrow y = -2 \end{cases}$$

Reflexiona sobre la teoría

36.  ¿Verdadero o falso? Justifica tus respuestas.

- Se puede obtener la ecuación de una recta sabiendo su pendiente y el punto de corte con el eje Y .
- Con los puntos de corte con los ejes siempre es posible obtener la ecuación de una recta.
- La pendiente de una recta es lo que aumenta la x cuando la y aumenta 1.
- La pendiente de una recta es lo que aumenta la y cuando la x aumenta 1.
- Si una parábola corta al eje X en dos puntos, su vértice está entre medias de estos puntos.
 - Verdadero. Tenemos la pendiente y un punto de la recta, suficiente para hallar su ecuación.
 - Verdadero. Tendríamos un par de puntos con los que hallar la pendiente y la ecuación de la recta.
 - Falso. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.
 - Verdadero. Es la variación de y cuando la x aumenta una unidad.
 - Verdadero. Los dos puntos de corte con el eje X son simétricos, por lo que entre medias se encontrará el vértice.

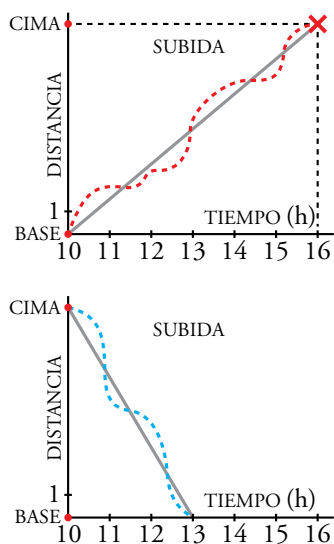
Reflexiona

Subir y bajar

Un montañero inicia la ascensión a un pico a las 10 de la mañana y llega a la cima a las 4 de la tarde. Duerme en el refugio y, al día siguiente, también a las 10 h, inicia el descenso, llegando a la base a la una de la tarde.

- ¿Crees que hay algún punto del camino por el que ha pasado en la bajada a la misma hora que en la subida? ¿A qué hora ocurrió tal cosa, suponiendo que ha bajado y subido a velocidades constantes?

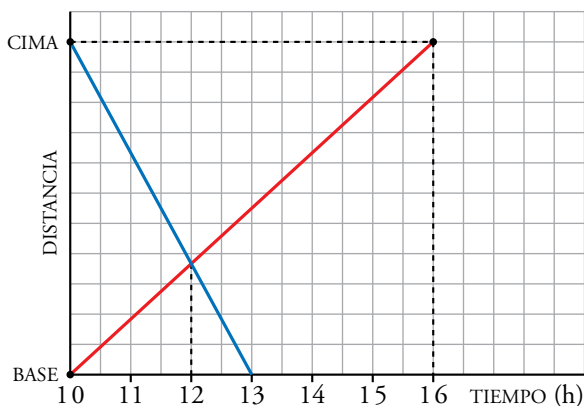
Observa las gráficas de la derecha y, si aún no lo tienes claro, dibuja ambas sobre los mismos ejes, suponiendo que han sido dos montañeros haciendo caminos inversos en el mismo día.



Al subir, a las 12 h el montañero ha recorrido $\frac{1}{3}$ del camino.

Al bajar, a las 12 h ha recorrido $\frac{2}{3}$ del camino, y le falta $\frac{1}{3}$ del camino para llegar a la falda de la montaña.

Por tanto, pasa por el mismo lugar a la misma hora, a las 12 h.



Piensa y decide

¿Cuál es cuál?

- Cada gráfica representa dos vehículos que van a velocidad constante. Así, la función que relaciona la distancia y el tiempo, en cada vehículo, es una recta. Asocia cada enunciado con una gráfica:

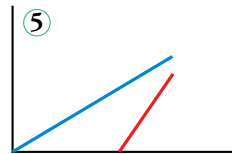
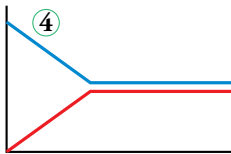
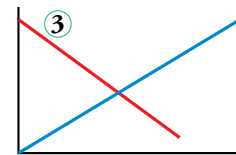
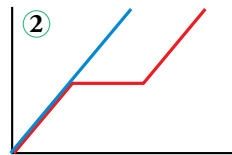
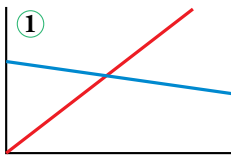
Ⓐ Un coche partió y una moto salió en su persecución.

Ⓑ Un coche va, otro viene, y chocan.

Ⓒ Un coche va, un camión viene, y se cruzan.

Ⓓ Un coche se acerca y otro se aleja.

Ⓔ Dos autobuses salen juntos y uno de ellos hace un descanso.



A ↔ 5

B ↔ 4

C ↔ 1

D ↔ 3

E ↔ 2

Entrena resolviendo problemas

- Un grupo de 17 chicas y chicos de la misma edad organizan un gran viaje. A la reunión inicial acuden los padres y las madres de todos ellos, cuya edad media es de 45 años. Pero si consideramos al grupo formado por padres, madres e hijos, la edad media es de 35 años. ¿Qué edad tienen los chicos y las chicas?

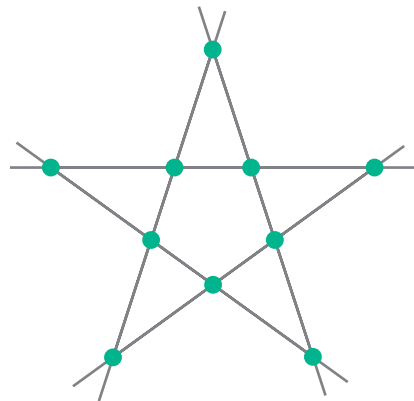
Entre padres y madres suman \longrightarrow $45 \cdot 17 \cdot 2 = 1\,530$ años

Entre madres, padres e hijos suman \longrightarrow $35 \cdot 17 \cdot 3 = 1\,785$ años

Solo los hijos suman \longrightarrow $1\,785 - 1\,530 = 255$ años

Cada hijo tiene \longrightarrow $255 : 17 = 15$ años

- Sitúa 10 soldaditos sobre una mesa de modo que haya 5 filas de 4 soldados.



• a) Tienes estas tres monedas:



¿Cuántas cantidades de dinero distintas puedes formar con ellas?

b) ¿Y si tuvieras estas cinco monedas?



a) Puedes poner una moneda y obtendrías:



Con dos monedas, obtendrías:



$$0,10 + 0,20 = 0,30 \text{ €}$$



$$0,10 + 0,50 = 0,60 \text{ €}$$



$$0,20 + 0,50 = 0,70 \text{ €}$$

Con tres monedas, obtendrías:



$$0,10 + 0,20 + 0,50 = 0,80 \text{ €}$$

En total, son 7 cantidades distintas de dinero.

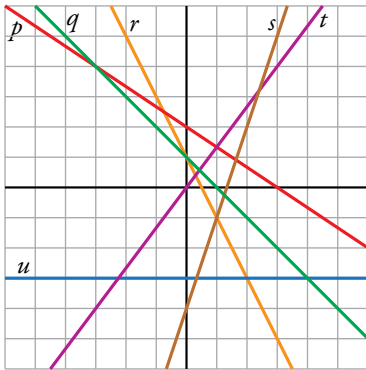
Si añadimos la cantidad 0 € (no tenemos ninguna moneda) serían 8 posibles cantidades.

b) Tomando una moneda, hay 5 posibilidades, una por cada moneda. Tomando dos monedas hay 10 posibilidades:

 10 cént. + 20 cént.	 20 cént. + 50 cént.	 50 cént. + 1 €	 1 € + 2 €
 10 cént. + 50 cént.	 10 cént. + 1 €	 50 cént. + 2 €	
 10 cént. + 1 €	 20 cént. + 2 €		
 10 cént. + 2 €			

Autoevaluación

1. Asocia cada una de estas funciones lineales con su ecuación y escribe su pendiente:



- a) $y = 3x - 4$
- b) $y = -2x + 1$
- c) $y = (4/3)x$
- d) $y = -2/3x + 2$
- e) $y = -3$
- f) $y = -x + 1$

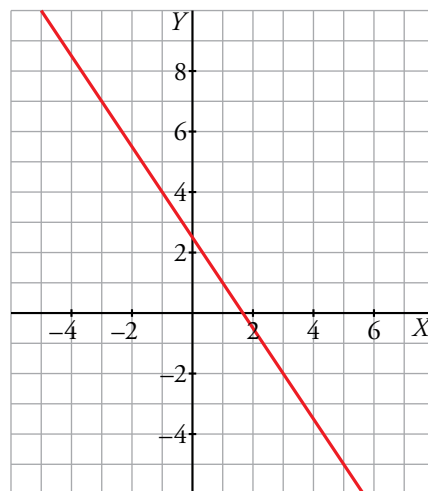
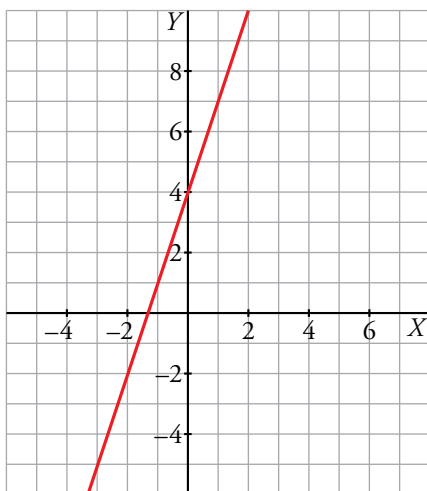
- a) Recta s , $m = 3$
- b) Recta r , $m = -2$
- c) Recta t , $m = 4/3$
- d) Recta p , $m = -2/3$
- e) Recta u , $m = 0$
- f) Recta q , $m = -1$

2. Representa estas funciones lineales y escribe la ecuación de las tres últimas:

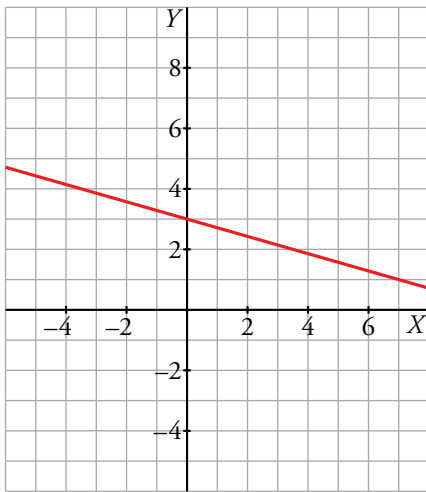
- a) $y = 3x + 4$
- b) $3x + 2y = 5$
- c) Recta de pendiente $1/4$ que pasa por $(3, 0)$.
- d) Recta que pasa por los puntos $(4, 1)$ y $(-2, 4)$.
- e) Función de proporcionalidad que pasa por $(4, -3)$.

a) $y = 3x + 4$

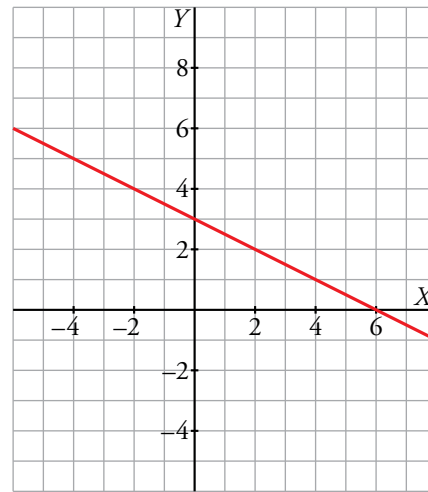
b) $y = \frac{-3}{2}x + \frac{5}{2}$



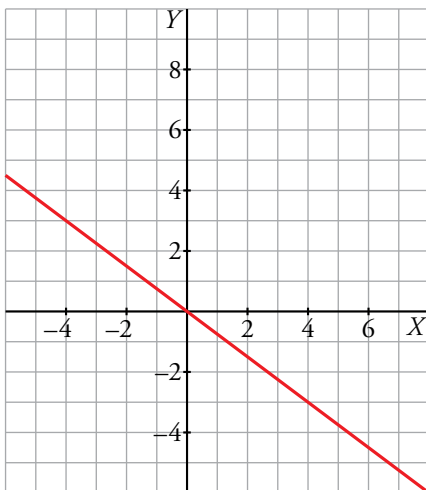
c) $y = \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}$



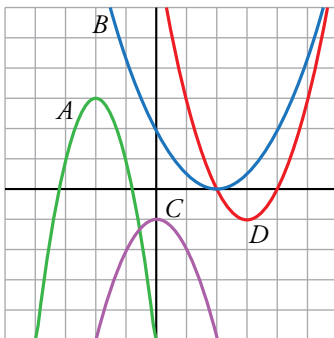
d) $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3}{-6} = -\frac{1}{2}; y = -\frac{1}{2}x + 3$



e) La función pasa por (0, 0). $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-3}{4}; y = -\frac{3}{4}x$



3. Asocia cada ecuación con su parábola:



$y = -x^2 - 1$

$y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

$y = -2x^2 - 8x - 5$

$y = x^2 - 6x + 8$

A $\rightarrow y = -2x^2 - 8x - 5$

B $\rightarrow y = \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$

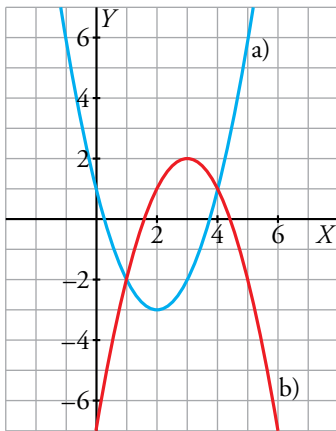
C $\rightarrow y = -x^2 - 1$

D $\rightarrow y = x^2 - 6x + 8$

4. Representa estas parábolas:

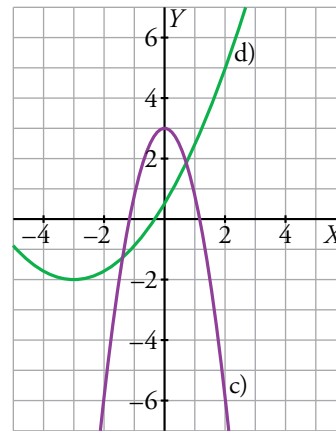
a) $y = x^2 - 4x + 1$

c) $y = -2x^2 + 3$



b) $y = -x^2 + 6x - 7$

d) $y = (1/3)x^2 + 2x + 1$



5. La temperatura de hoy es de 20 °C, y vamos a hacer una excursión en globo. Sabemos que la temperatura del aire desciende, aproximadamente, 6 °C por cada kilómetro de ascensión.

a) ¿Qué temperatura habrá si ascendemos 3 km? ¿Cuánto habremos ascendido si estamos a 11 °C?

b) Representa la función *altura* → *temperatura* y escribe su expresión analítica.

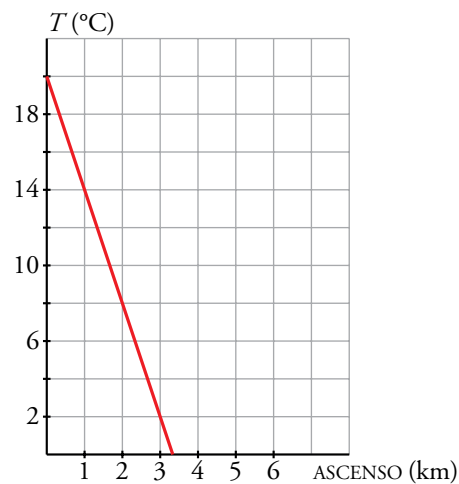
a) $20 - 6 \cdot 3 = 2^\circ$

Si estamos a 11 °C habremos ascendido 1,5 km.

b) Pasa por (0, 20) y (3, 2).

$$m = \frac{2 - 20}{3 - 0} = -3$$

$$y = 20 - 3x$$



6. Halla la ecuación para cada uno de estos enunciados y representa las funciones correspondientes:

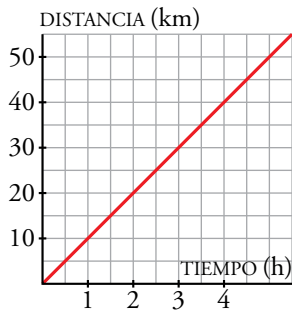
a) Begoña empieza ahora a correr a 10 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?

b) Sonia salió de casa hace dos horas a 6 km/h. ¿Qué distancia habrá recorrido dentro de t horas?

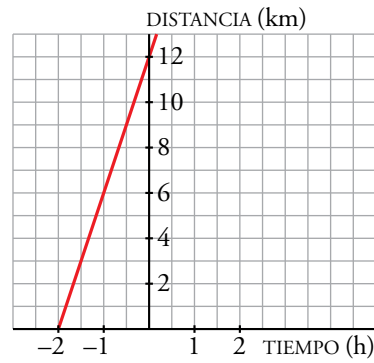
c) Mariajo sale a 4 km/h desde su casa hacia la mía, que está a 18 km. ¿A qué distancia se encontrará de mi casa dentro de t horas?

d) Lluch salió a 5 km/h a las 7:00 h hacia el puerto, que está a 14 km. ¿A qué distancia del puerto se encuentra a las t horas?

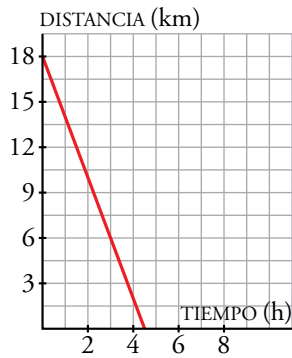
a) $d = 10t$



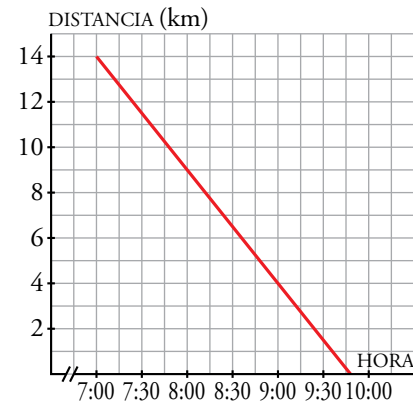
b) $d = 6(t + 2) \rightarrow d = 6t + 12$



c) $d = 18 - 4t$



d) $d = 14 - 5(t - 7) \rightarrow d = -5t + 49$



- 7. Hace dos horas, Estefanía salió de su casa hacia la casa de Víctor en bici a 15 km/h. Víctor sale ahora andando a 6 km/h en busca de ella. Si viven a 58 km, ¿dónde se encontrarán? ¿Cuánto tiempo ha estado Estefanía en bici?**

Llamamos d a la distancia a casa de Estefanía y tomaremos $t = 0$ en el momento en el que Víctor sale de su casa.

Ecuación del movimiento de Estefanía: $d = 15(t + 2)$

Ecuación del movimiento de Víctor: $d = 58 - 6t$

$$\left. \begin{array}{l} d = 15(t + 2) \\ d = 58 - 6t \end{array} \right\} \begin{array}{l} 15(t + 2) = 58 - 6t; \quad 15t + 30 = 58 - 6t; \quad 21t = 28; \quad t = 4/3 \end{array}$$

$$d = 58 - 6 \cdot \frac{4}{3} = 50$$

Se encuentran a 50 km de casa de Estefanía, cuando esta lleva 3 h y 20 min en bici.